

УДК 519.634

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

© 2005 г. К. Г. Батраков, С. Н. Сытова

(220080 Минск, пр-т Скорины, 4, Ин-т ядерных проблем БГУ, Беларусь)

e-mail: batrakov@inp.minsk.by; sytova@inp.minsk.by

Поступила в редакцию 19.07.2004 г.

Освещается развитие численных методов решения систем дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании объемных лазеров на свободных электронах, и обсуждаются численные эксперименты. Библ. 39. Фиг. 7.

**Ключевые слова:** моделирование объемных лазеров, численный алгоритм.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразование кинетической энергии электронного пучка в энергию излучения лежит в основе работы многих электронных приборов. К таким приборам относятся лампы бегущей волны (ЛБВ), лампы обратной волны (ЛОВ), лазеры на свободных электронах (ЛСЭ). Существующие в настоящее время генераторы и усилители электромагнитной энергии на электронных пучках перекрывают частотный диапазон от микроволнового до вакуумного ультрафиолета (см. [1]–[4]). Излучение ЛСЭ в ультрафиолетовом диапазоне получено относительно недавно на основе механизма стимулированного усиления спонтанного излучения (SASE). Несмотря на достигнутые в этой области успехи, остается много проблем. Одна из проблем связана с невозможностью перестройки в широком диапазоне частот. Как правило, лазеры с высоким уровнем КПД имеют оптимальные, предварительно рассчитанные параметры (параметры электронного пучка, размеры волноводов и резонаторов, периоды ондуляторов и дифракционных решеток, величины модуляции и т.д.). Изменение любого из этих параметров, необходимое для перестройки частоты, приводит к резкому снижению эффективности генерации. Другая проблема возникает при генерации излучения сверхбольшой мощности. При генерации мощностей 10 ГВт и выше крайне желательно использовать электронные пучки с большим поперечным сечением. Это необходимо для снижения плотности токов при большой величине общего тока. Однако известно, что при линейных размерах поперечного сечения, превышающих длину волны генерируемого излучения, в резонаторе (волноводе) возбуждается большое количество паразитных мод, приводящих к деструктивной интерференции и, как следствие, к резкому падению эффективности.

Один из возможных путей решения указанных проблем заключается в использовании объемной распределенной обратной связи (ОРОС) в объемных лазерах на свободных электронах (ОЛСЭ). Принципы и теоретические основы функционирования ОЛСЭ были заложены в работах [5], [6]. Основным достоинством ОЛСЭ является возможность селекции мод в сверхразмерной системе. Объемный характер ОРОС позволяет также, изменяя геометрию ОРОС или положение электронного пучка относительно структуры, изменять частоту генерируемой волны. Первое экспериментальное наблюдение генерации ОЛСЭ в миллиметровом диапазоне было проведено в НИИ ЯП БГУ (см. [7]).

К настоящему времени довольно детально изучена линейная стадия работы ОЛСЭ. Получены пороговые токи генерации, спектрально-угловые распределения, времена развития неустойчивости ОЛСЭ для различных механизмов излучения (параметрического, ондуляторного, смит-парселловского) (см. [7]–[21]). В процессе генерации линейный режим работы быстро сменяется нелинейной стадией, на которой происходит основной отбор энергии у электронного пучка. Поэтому возникает необходимость столь же детальной проработки нелинейной стадии работы ОЛСЭ, изучения режимов генерации, усиления, регенеративного усиления на стадии нелинейного насыщения, а также влияния на эти режимы плавного изменения геометрии ОРОС. Данные расчеты необходимы для постановки экспериментов, определения оптимальной геометрии и обработки полученных результатов.

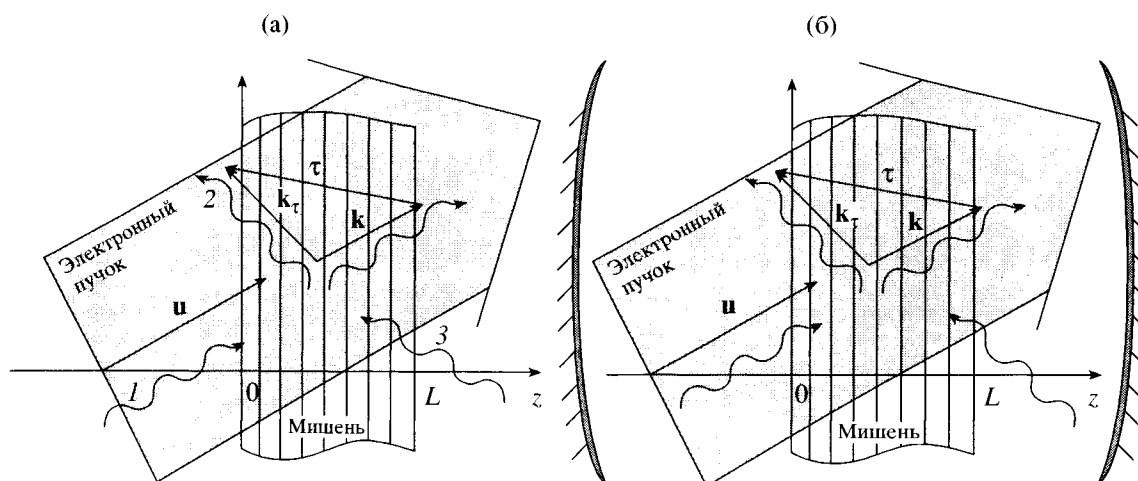
Аналитически можно исследовать только линейный режим и некоторые частные особенности нелинейной стадии, поскольку математические модели, описывающие нелинейную стадию работы ОЛСЭ, очень сложны. Они представляют собой системы многомерных нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных. Граничные условия записываются на различных границах системы и сами могут являться дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, неразрешенными относительно производных по времени для нескольких неизвестных функций. Поэтому для описания нелинейной стадии работы ОЛСЭ необходимо проведение детального численного моделирования. Подобного рода задачи могут возникать и в других областях физики (в частности, в гидродинамике, теории переноса излучения), химии и т.д. Все сказанное выше свидетельствует об актуальности предлагаемой работы.

Моделированию ЛСЭ посвящено большое количество статей (см. [22]–[25]). В наших работах [26]–[36] рассмотрены математические модели различных типов ОЛСЭ в рентгеновском, оптическом и миллиметровом диапазонах. Сначала электронный пучок моделировался в гидродинамическом приближении (см. [26], [27]) или в кинетическом приближении с использованием функций распределения (см. [28]–[30]). Эти методы, хорошо работающие для небольших значений тока электронного пучка, приводили к неустойчивости при его увеличении, что объясняется возможным пересечением разных траекторий электронов пучка при больших значениях токов и электромагнитных полей. В данной работе, как и в [36], электронный пучок моделируется с помощью метода усреднения электронного тока по начальным фазам, который ранее использовался при моделировании ЛБВ, ЛОВ и ЛСЭ.

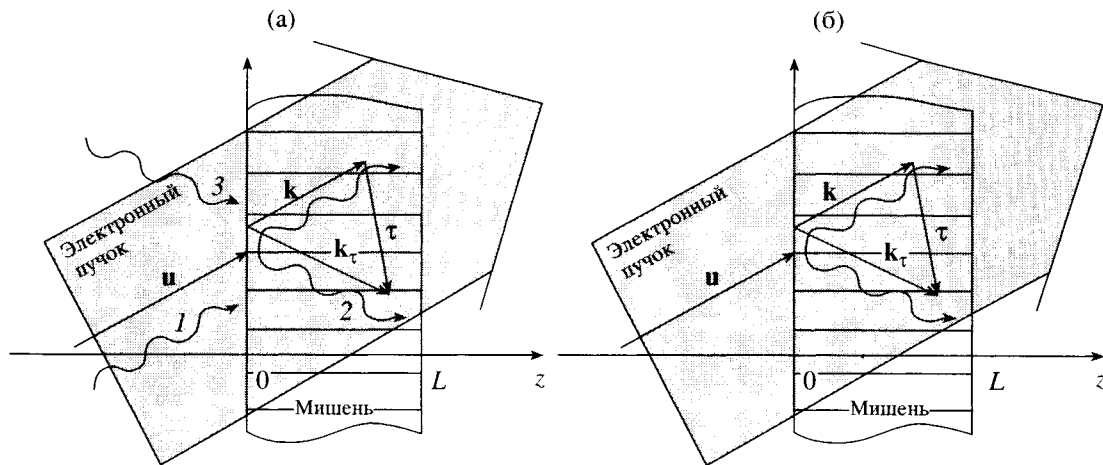
## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЛСЭ

Электронный пучок в генераторах (усилителях) ОЛСЭ может пролетать как вблизи трехмерной периодической структуры (см. [14], [15]), так и непосредственно внутри самой периодической структуры (см. [9]–[11], [18]). В общем случае при формировании брэгговской ОРОС в ОЛСЭ может участвовать  $n$  сильно связанных волн (так называемая  $n$ -волновая брэгговская дифракция). В частном случае двухволновой дифракции могут быть реализованы две принципиально различные геометрии: геометрия Брэгга, в которой волны идут в противоположных направлениях, и геометрия Лауэ с волнами, распространяющимися в одном направлении. На фиг. 1а изображена объемная схема ОЛСЭ в геометрии Брэгга. Электронный пучок со скоростью  $u$  “падает” под некоторым углом на пространственно-периодическую мишень толщиной  $L$ . Одновременно на систему падает электромагнитная волна 1 с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $k$ . Если выполняются условия дифракции из [37], то в мишени возникает сильная дифрагированная волна 2 с волновым вектором  $k_\tau = k + \tau$ , где  $\tau$  – вектор обратной решетки. Для того чтобы электроны пучка группировались в излучающую фазу и генерировали коллективное излучение, необходимо, чтобы фазовая скорость электромагнитной волны несколько отставала от скорости электронного пучка. Равенство этих скоростей выражается известным условием Вавилова–Черенкова

$$\omega - ku = 0. \tag{1}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Характерная величина отстройки от (1) определяется либо длиной области взаимодействия электронного пучка с волной (в случае слабого усиления), либо плотностью электронного пучка (в случае сильного усиления, см. [10]). Возникающая при выполнении условий синхронизма неустойчивость электронного пучка приводит к генерации коллективного квазичеренковского излучения. В рентгеновском диапазоне в качестве мишени используются кристаллические пластинки. В этом случае величина пространственного периода определяется периодом кристаллической решетки и испускаемое излучение имеет длину, сравнимую с межатомными расстояниями, т.е. принадлежит рентгеновскому диапазону. В микроволновом диапазоне в качестве мишени может использоваться искусственная дифракционная решетка, гофрированный волновод. В работе [18] рассматривалась объемная периодическая система, состоящая из периодически натянутых диэлектрических или металлических нитей.

В геометрии Лауэ прямая и дифрагированная волны распространяются в одном направлении (фиг. 2а). В обеих геометриях при моделировании ОЛСЭ предусмотрена возможность падения извне на систему двух волн (волны 1 и 3) с заданной амплитудой (в случае моделирования усилителя). В геометрии Брэгга рассматривается также режим генератора, при котором падающие внешние волны отсутствуют. Моделировался также случай ОЛСЭ с установленными внешними зеркалами. Схематично он изображен на фиг. 1б. В общем случае на периодическую решетку одновременно падают две волны.

В геометрии Брэгга могут быть реализованы несколько различных режимов работы: 1) величина тока меньше критической и коллективное излучение отсутствует; 2) при достижении критической величины тока становится возможен режим усиления электронным пучком внешних падающих электромагнитных волн (так называемый режим регенеративного усиления); 3) при дальнейшем увеличении тока и превышении им порогового значения ( $j_{\text{пор}}$ ) реализуется режим генерации.

В геометрии Лауэ в отсутствие внешней волны также возможно возникновение излучения (фиг. 2б). Это так называемый режим SASE (см. [38]). Режим SASE в геометрии Лауэ, как и режим генерации в геометрии Брэгга, развивается из спонтанных шумов. При добавлении в систему с геометрией Лауэ внешних отражателей также становится возможным режим генерации (см. [17]).

В настоящей работе проводится исследование нелинейной стадии перечисленных выше режимов работы ОЛСЭ методами математического моделирования.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЛСЭ

Уравнения, описывающие работу ОЛСЭ, выводятся из уравнений Максвелла в приближении медленно меняющихся амплитуд. Из первых двух уравнений Максвелла получается одно урав-

нение второго порядка

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{j}_b}{\partial t}, \tag{2}$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $\mathbf{j}_b$  – плотность тока электронного пучка.

В случае двухволновой дифракции подставим эти величины в (2) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\sigma (E e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + E_\tau e^{i(\mathbf{k}_\tau \mathbf{r} - \omega t)}),$$

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{e}_\sigma j e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\mathbf{e}_\sigma$  – вектор сигма-поляризации (см. [37]).

В приближении медленно меняющихся амплитуд, когда

$$\left| \frac{1}{k} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} \right| \ll |E|, \quad \left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll |E|, \quad k = \omega/c,$$

можно пренебречь вторыми производными по времени и пространству.

Уравнения, описывающие электронный пучок, могут быть получены либо в гидродинамическом приближении, либо с помощью функций распределения, либо с помощью метода усреднения фаз электронного пучка. Моделирование динамики электронного пучка с помощью кинетического уравнения и функциями распределения было выполнено в оптическом диапазоне для поверхностной схемы ОЛСЭ (см. [28]–[30]). В данной работе динамика электронного пучка в ОЛСЭ моделируется усреднением по фазам влета электронов в область взаимодействия (см. [35]). Этот метод хорошо известен и широко применяется для расчета ЛБВ, ЛОВ, ЛСЭ и других электронных приборов.

Получим выражение для тока пучка электронов. Считаем, что величина ведущего магнитного поля такова, что пучок является замагниченным. Динамика электронного пучка при этом будет иметь одномерный характер. Уравнение движения одного электрона в поле волны имеет вид

$$\ddot{z} = \frac{e}{m\gamma^3} (\mathbf{e}_\sigma \mathbf{n}) \operatorname{Re} \{ a \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp + ik_z z - i\omega t) \},$$

где  $\gamma$  – лоренц-фактор электронного пучка,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности мишени,  $k_z$  – проекция волнового вектора  $\mathbf{k}$  на ось  $z$ . Не представляется возможным проследить за движением отдельного электрона пучка. Каждый электрон можно охарактеризовать своей фазой влета в область взаимодействия. Эта начальная фаза является индивидуальной меткой электрона в пучке. Процедура усреднения по этой фазе на длине волны позволяет перейти от микроскопического описания к макроскопическому. Усредненный таким образом ток имеет вид

$$j = \frac{en_0 u}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta_1 \int_{\omega(t-z/u)}^{\omega(t-z/u)+2\pi} d\Theta_0 \exp[-i\Theta(t, \Theta_1 - \Theta_0)]. \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $n_0$  – плотность частиц пучка,  $u$  – их начальная скорость,  $\Theta(t, t_0, \mathbf{r}_\perp) = k_z z + \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \omega t(z, t_0)$  – фаза электрона в волне,  $t(z, t_0)$  – траектория движения электрона, влетающего в момент времени  $t_0$  в область взаимодействия. Начальная фаза влета электрона в область взаимодействия имеет вид

$$\Theta(t = t_0, t_0, \mathbf{r}_\perp) = \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \omega t_0 = \Theta_1 - \Theta_0.$$

В отличие от ондуляторной системы, в которой электронная динамика определяется только временем влета  $t_0$ , в нашем случае на динамику электрона оказывает влияние также пространственная поперечная точка влета пучка в область взаимодействия  $\Theta_1$ . Таким образом, переход к макроскопическому описанию связан с усреднением по двум фазам. При проведении усреднения используется теорема Лиувилля, которая равнозначна в данном случае закону сохранения частиц и в одномерном случае сводится к равенству

$$j dt = j_0 dt_0.$$

Это равенство является очень полезным при усреднении тока по периоду колебания волны. Усреднение по фазам  $\Theta_0, \Theta_1$  в (6) путем простых преобразований сводится к усреднению по одной фазе  $p \in [-2\pi, 2\pi]$ .

Итак, в общем виде математическая модель объемного ОЛСЭ (фиг. 1) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + a_1 \frac{\partial E}{\partial z} + b_{11} E + b_{12} E_\tau = \Phi j, \quad \frac{\partial E_\tau}{\partial t} + a_2 \frac{\partial E_\tau}{\partial z} + b_{21} E + b_{22} E_\tau = 0, \quad (4a)$$

$$j = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} \{ \exp[-i\Theta(t, z, p)] + \exp(-i\Theta(t, z, -p)) \} dp, \quad (4б)$$

$$\frac{d^2 \Theta(t, z, p)}{dz^2} = \Psi \left( k - \frac{d\Theta(t, z, p)}{dz} \right)^3 \operatorname{Re} \{ E(t - z/u, z) \exp[i\Theta(t, z, p)] \}, \quad (4в)$$

$$E|_{t=0} = 0, \quad E_\tau|_{t=0} = 0, \quad (4г)$$

$$E|_{z=0} = E_0, \quad E_\tau|_{z=L} = E_{\tau 0}, \quad (4д)$$

$$\Theta(t, 0, p) = p, \quad \frac{d\Theta(t, 0, p)}{dz} = k_z - \omega/u, \quad (4е)$$

$$t > 0, \quad z \in [0, L], \quad p \in [-2\pi, 2\pi],$$

где  $E_0, E_{\tau 0}$  – амплитуды падающих на мишень волн. В системе (4) помимо временной рассматриваются пространственная координата  $z$  и начальная фаза электронов  $p$ . Амплитуды электромагнитного поля  $E(t, z), E_\tau(t, z)$  и коэффициенты  $a, b$  и  $\Phi$  являются комплексными. Функция  $\Theta(t, z, p)$  описывает фазу электронного пучка относительно электромагнитной волны. Функция  $\Theta$  и коэффициенты  $\Psi$  являются действительными.

На начальном этапе работы лазера развивается линейный нестационарный процесс, который характеризуется экспоненциальным возрастанием полей. По мере преобразования кинетической энергии электронов в энергию электромагнитной волны скорость электронов падает и они выходят из условий синхронизма. Этот процесс происходит уже на нелинейной стадии. При этом система переходит в стационарный режим. Система, описывающая стационарный режим работы ОЛСЭ, приобретает вид

$$\frac{dE}{dz} + a_{11} E + a_{12} E_\tau = \Phi j, \quad \frac{dE_\tau}{dz} + a_{21} E + a_{22} E_\tau = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{d^2 \Theta(z, p)}{dz^2} = \Psi \left( k - \frac{d\Theta(z, p)}{dz} \right)^3 \operatorname{Re} [ E(z) \exp(i\Theta(z, p)) ]. \quad (5б)$$

Граничные условия (4д,е) и формула для плотности тока пучка (4б) сохраняются.

Граничные условия (11) выписаны для случая Брэгга (фиг. 1). В геометрии Лауэ (фиг. 2) они имеют вид

$$E|_{z=0} = E_0, \quad E_\tau|_{z=0} = E_{\tau 0}. \quad (6)$$

При наличии внешних зеркал граничные условия (4д) должны быть обобщены следующим образом:

$$E|_{z=0} = E_0 + \alpha_1 E|_{z=L} \exp(i\varphi_1) + \alpha_2 E_\tau|_{z=0} \exp(i\varphi_2),$$

$$E_\tau|_{z=L} = E_{\tau 0} + \alpha_3 E|_{z=L} \exp(i\varphi_3) + \alpha_4 E_\tau|_{z=0} \exp(i\varphi_4).$$

Здесь  $\alpha_i, \varphi_i$  – амплитуды и фазы коэффициентов связи соответствующих волн при отражении.

Граничные условия в геометрии Лауэ (6) при установке внешних зеркал выглядят следующим образом:

$$E|_{z=0} = E_0 + \alpha_1 E|_{z=L} \exp(i\varphi_1) + \alpha_2 E_\tau|_{z=L} \exp(i\varphi_2),$$

$$E_\tau|_{z=0} = E_{\tau 0} + \alpha_3 E|_{z=L} \exp(i\varphi_3) + \alpha_4 E_\tau|_{z=L} \exp(i\varphi_4). \quad (7)$$

Предполагается, что все функции являются гладкими, ограниченными и медленно меняющимися.

4. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Далее везде, где это удобно, будем пользоваться обозначениями из [39].

Сначала рассмотрим разностную схему для системы (4). Вводя в области

$$\Omega \cap \Omega_t = \{0 \leq z \leq L, -2\pi \leq p \leq 2\pi\} \cap \{t > 0\}$$

равномерные сетки

$$\omega_t = \{t_l = lh, l = 0, 1, \dots\}, \quad \omega_z = \{z_m = mh_z, m = 0, 1, \dots, M, Mh_z = L\},$$

$$\omega_p = \{p_j = h_p j, j = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N, h_p N = 2\pi\},$$

можно записать

$$\hat{\Theta}_{zz}^j = \Psi(k - \hat{\Theta}_z^j)^3 \operatorname{Re}[\tilde{E} \exp(i\Theta^j)], \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \tag{8a}$$

$$E_t + a_1 \hat{E}_z + b_{11} \hat{E} + b_{12} \hat{E}_\tau = \Phi \sum_{j=0}^N c_j [\exp(-i\hat{\Theta}^j) + \exp(-i\hat{\Theta}^{-j})], \tag{8б}$$

$$E_{\tau t} + a_2 \hat{E}_{\tau z} + b_{21} \hat{E} + b_{22} \hat{E}_\tau = 0, \tag{8в}$$

где

$$\tilde{E} = E(t_l - \eta t_m, z_m), \quad \eta = h_z / (h_t u).$$

При расчетах берется целая часть  $\eta$ ; при  $t_l - \eta t_m < 0$  полагается  $\tilde{E} = E(0, z_m)$ ;  $c_j$  – коэффициенты квадратурной формулы. Для численного интегрирования использовалась формула трапеций.

Для стационарной системы (5) предлагается итерационный алгоритм

$$\hat{\Theta}_{zz}^{j,s+1} = \Psi(k - \hat{\Theta}_z^{j,s+1})^3 \operatorname{Re}[E^s \exp(i\Theta^j)], \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \tag{9a}$$

$$E_z^{s+1} + a_{11} E^{s+1} + a_{12} E_\tau^{s+1} = \Phi \sum_{j=0}^N c_j [\exp(-i\Theta^j) + \exp(-i\Theta^{-j})], \tag{9б}$$

$$E_{\tau z}^{s+1} + a_{21} E^{s+1} + a_{22} E_\tau^{s+1} = 0, \tag{9в}$$

где  $s = 0, 1, \dots$  – номер итерации. Полагаем  $\hat{\Theta}^0 = h_p j$  и  $E^0 = 0, E_\tau^0 = 0$  для внутренних точек сетки.

Перепишем дифференциальное уравнение (9а) в следующем виде:

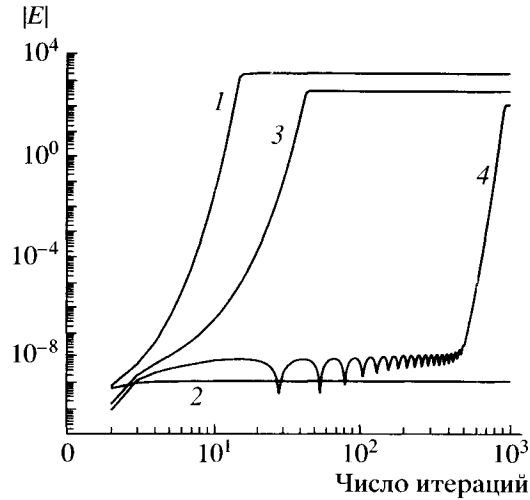
$$\frac{\hat{\Theta}_{m+1}^{j,s+1} - 2\hat{\Theta}_m^{j,s+1} + \hat{\Theta}_{m-1}^{j,s+1}}{h_z^2} = \Psi\left(k - \frac{\hat{\Theta}_{m+1}^{j,s+1} - \hat{\Theta}_{m-1}^{j,s+1}}{2h_z}\right)^3 \operatorname{Re}[E_m^s \exp(i\Theta_m^j)].$$

Это – неявное разностное уравнение относительно неизвестного  $\hat{\Theta}_{m+1}^{j,s+1}$ . Чтобы решить данное кубическое уравнение, необходимо выбрать тот корень, который расположен “близко” от соседних значений. Остальные два корня лишены смысла. Аналогично решается уравнение (8а).

Граничные условия во всех случаях записываются точно.

Геометрия Лауэ отличается от геометрии Брэгга направлением распространения дифрагированной волны. Все приведенные выше схемы были выписаны для случая геометрии Брэгга (записана правая разностная производная по  $z$  для волны  $E_z$ ). В случае Лауэ там должна стоять левая разностная производная.

Поскольку разностные схемы (8) и (9) существенно нелинейны, исследовать скорость сходимости и сходимость не представляется возможным. Исследование же линеаризованных схем является тривиальным. Поэтому ограничимся приведением фиг. 3, где показано установление решения в итерационном процессе. В области, где порог генерации находится далеко и преодолен (кривая 1) либо практически нет усиления (кривая 2), требуется всего около 10 итераций. Обычно для установления решения требуется несколько десятков итераций (кривая 3). В районе порога генера-



Фиг. 3.

ции, где идет медленное установление решения, может потребоваться несколько сотен итераций (кривая 4). Установление решения нестационарной системы будет рассмотрено ниже.

Обсудим вопрос, откуда берется излучение в системе в отсутствие внешних падающих волн (режим генератора). В реальных физических системах излучение возникает и усиливается из спонтанных шумов. В численном моделировании этому соответствуют вычислительные погрешности в интеграле в правой части уравнений. Понятно, что на первой итерации или в начальный момент времени всюду внутри  $z \in [0, L]$  имеем

$$I = \Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} \{ \exp[-i\Theta(z, p)] + \exp[-i\Theta(z, -p)] \} dp \equiv 0.$$

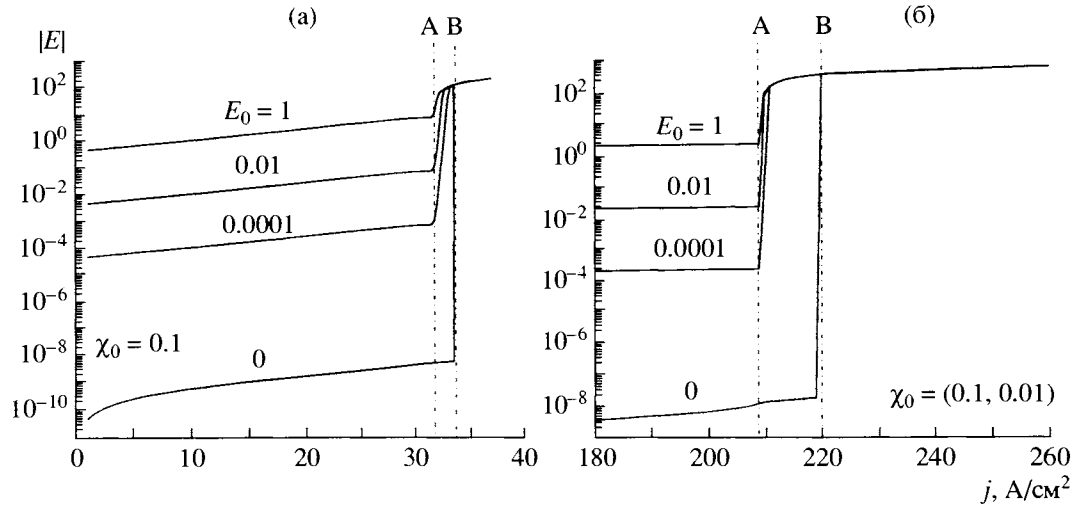
Но в действительности получается  $I \sim 10^{-15}$ . Это и есть эквивалент спонтанных шумов и “запал” процесса генерации.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОЛСЭ

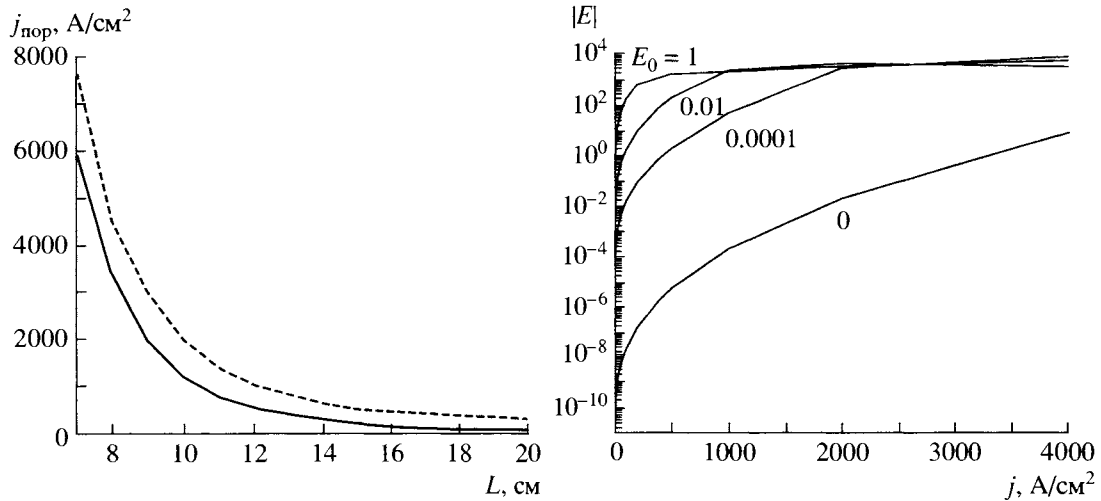
На основе предложенных разностных методов был разработан комплекс программ для численного моделирования работы квазичеренковского ОЛСЭ. Продемонстрируем небольшое количество примеров успешной работы нашего комплекса программ, характеризующих все основные особенности поведения электромагнитных полей для двухволнового квазичеренковского ОЛСЭ, генерирующего излучение в миллиметровом диапазоне длин волн. Полученные численные результаты моделирования полностью совпадают с аналитическими оценками и ожидаемым характером поведения решения.

Следует подчеркнуть, что мы также моделировали работу ОЛСЭ в рентгеновском диапазоне длин волн. Однако в настоящий момент в связи с нерешенностью многих физических и технических проблем в этом диапазоне, таких как проблема многократного рассеяния частиц в кристаллах и др., создание ОЛСЭ в рентгеновском диапазоне на квазичеренковском механизме при существующих пучках не представляется возможным.

Стартовые токи электронного пучка, мощность излучения и частота излучения зависят от геометрии ОРОС. Изменение геометрии приводит к изменению этих величин и переходу от режима генерации к режиму усиления и наоборот. Всего имеется более десятка исходных параметров системы, которые влияют на ее качественное поведение. Фиг. 4 и 5 демонстрируют результаты моделирования стационарной системы (5). Плотность порогового тока является очень важной величиной, характеризующей поведение системы. На фиг. 4 приводятся графики зависимости амплитуды электромагнитного поля от плотности тока пучка в геометрии Брэгга в идеализированной системе без поглощения (мнимая часть диэлектрической проницаемости среды  $\chi_0$  равна нулю) (а) и с поглощением (б). Основной задачей здесь являлось исследование режима усиления



Фиг. 4.



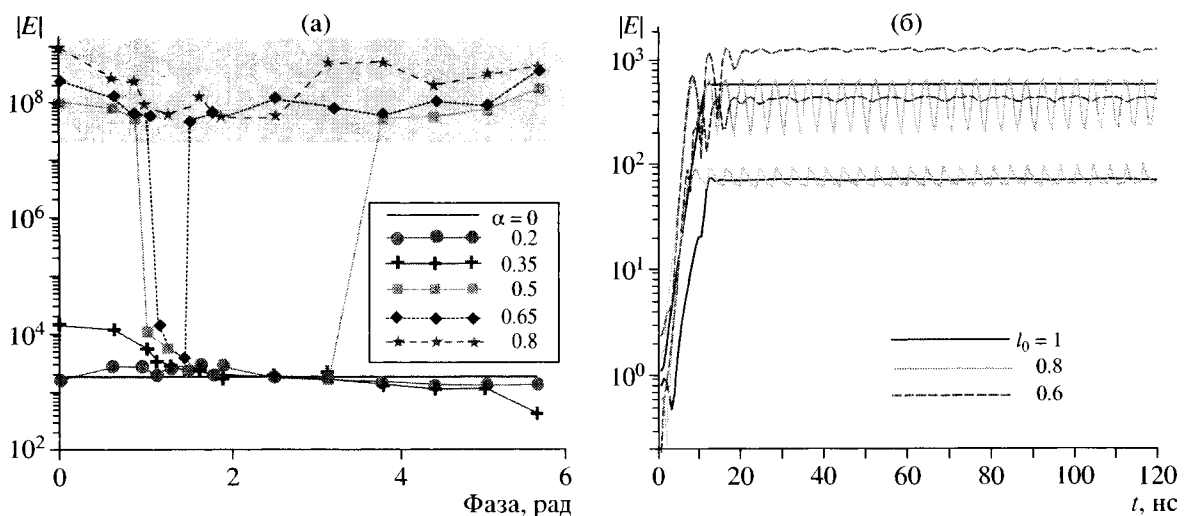
Фиг. 5.

в геометрии Брэгга ( $L = 20$  см). Как и ожидалось, с учетом и увеличением поглощения порог генерации увеличивается. На обоих графиках этот порог отмечен линией В. Интервал между линиями А и В есть режим усиления. С увеличением поглощения ширина этого интервала увеличивается на порядок. Рост ширины области усиления определяется балансом между темпом наработки излучения в синхронной с электронным пучком волне и поглощением излучения отраженной волны, обеспечивающей распределенную обратную связь в генераторе. С ростом поглощения увеличивается размер области, в которой поглощение излучения в обратной волне превышает его наработку в синхронной. Область с такими параметрами и соответствует режиму регенеративного усиления. На фиг. 5а демонстрируется график зависимости порога генерации от длины мишени ( $E_0 = 0$ ;  $\chi_0 = 0.1$  – сплошная кривая,  $\chi_0 = (0.1, 0.001)$  – штриховая кривая). Показан порог генерации без и с наличием поглощения в мишени. Чем больше толщина мишени, тем ниже порог. Функциональная зависимость порога генерации от длины изменяется. Согласно аналитическим оценкам, при малых длинах пороговый ток обратно пропорционален пятой степени длины области взаимодействия. При увеличении длины эта зависимость становится более мягкой. В идеальном случае при большой длине и учете поглощения пороговый ток перестает зависеть от длины. При численных расчетах было показано, что присутствие внешней волны  $E_0 \neq 0$  также уменьшает порог генерации.

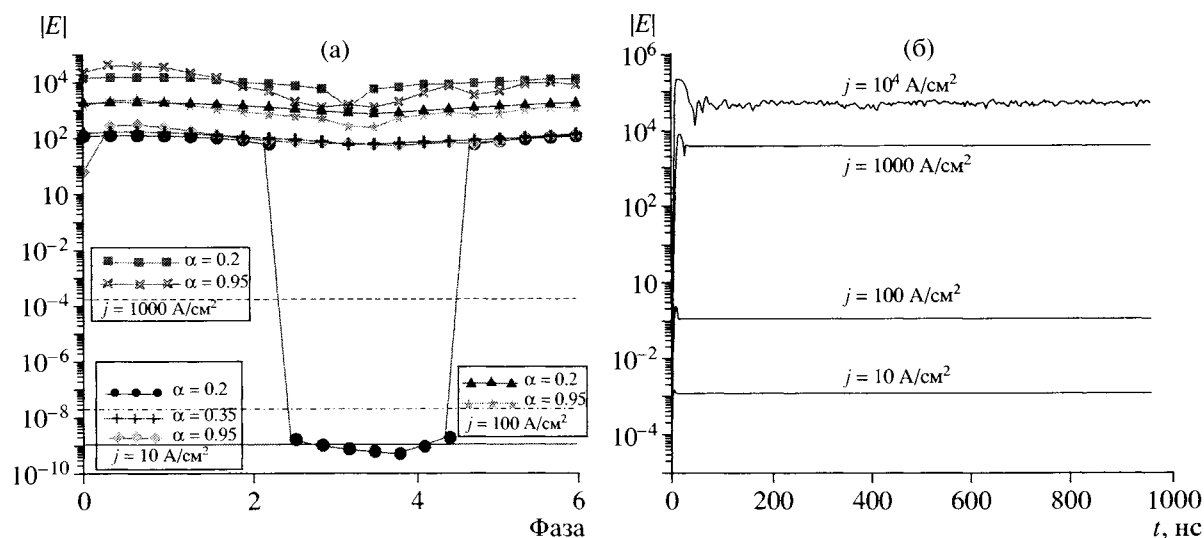
При моделировании исследовалась геометрия Лауэ (фиг. 2). На фиг. 5б изображена зависимость амплитуды электромагнитного поля от плотности тока для различных амплитуд падающих волн ( $\chi_0 = 0.1$ ,  $L = 80$ ). Кривая с амплитудой  $E_0 = 0$  соответствует режиму SASE. Остальные кривые демонстрируют режим усиления. При выбранных параметрах стимулированное усиление спонтанных шумов реализуется при больших плотностях тока. С увеличением длины взаимодействия требуемая для этого режима плотность тока будет падать.

Перейдем теперь к анализу результатов, полученных при моделировании ОЛСЭ с внешними зеркалами (геометрия фиг. 2б). Введение внешних зеркал понижает порог генерации, позволяя выйти на режим стационарного насыщения при более низких токах. Приведем результаты моделирования для случая внешней падающей волны с амплитудой  $E_0 = 0.1$  для нескольких значений коэффициента отражения  $\alpha_1 = \alpha$  (считаем, что остальные коэффициенты в (7) равны нулю:  $\alpha_i = 0$ ,  $i = 2, 3, 4$ ). Вариант  $\alpha = 0$  соответствует случаю отсутствия зеркал. Фиг. 6а демонстрирует зависимость амплитуды волны от фазы  $\varphi_1$ , меняющейся от 0 до  $2\pi$ . С увеличением коэффициента отражения после  $\alpha = 0.5$  четко проявляются две области: с устойчивым и неустойчивым решениями. Области, где получено неустойчивое “взрывающееся” решение, соответствует затененная область на фиг. 6а. Наличие такой области может быть объяснено зависимостью фаз генерируемой волны от фаз отражения от брэгговских зеркал. Изменяя  $\alpha$ , мы тем самым изменяем условия синхронизма между электронным пучком и волной. Когда электроны выходят из синхронизма с волной, токовое слагаемое становится малым, а система уравнений – линейной. Как известно, однородная линейная система уравнений имеет или только нулевое решение, или бесконечное количество решений (когда ее детерминант равен нулю); такая неопределенность может привести к “взрывам” при численном моделировании, чему соответствует затененная область на фиг. 6а. На фиг. 7а приведены результаты численного моделирования режима усиления в геометрии Лауэ с внешними зеркалами. Данные приведены для плотностей тока пучка  $j = 10$  А/см<sup>2</sup> (без зеркал – сплошная черная линия),  $j = 100$  А/см<sup>2</sup> (без зеркал – штрихпунктирная линия),  $j = 1000$  А/см<sup>2</sup> (без зеркал – штриховая линия) и для различных коэффициентов отражения  $\alpha$ . Генератор в геометрии Лауэ работает при плотностях тока на несколько порядков меньших, чем лазер в режиме SASE (при данной длине области взаимодействия).

И, наконец, обсудим результаты моделирования нестационарной системы. Результаты моделирования стационарного случая должны быть повторены и для нестационарного случая, что и было сделано. Кроме того, получены различные графики, демонстрирующие бифуркации решения. В частности, на фиг. 6б изображены амплитуды проходящей и дифрагированных волн на выходе из мишени для различных параметров геометрии Брэгга  $l_0$ . Изменение только одного параметра качественно меняет решение. Здесь мы видим кривые с четко повторяющимся периодом колебаний, наложением нескольких колебаний на одну кривую, а также установившееся стационарное решение. При изменении параметров системы происходит переход от одного режима генерации к другому в соответствии с переходом параметров порядка от одного критиче-



Фиг. 6.



Фиг. 7.

ского значения к другому. В качестве параметра порядка может выступать плотность электронного пучка, фактор асимметрии, коэффициент поглощения, частота и др. На фиг. 7б приведены результаты численного моделирования нестационарной системы в геометрии Лауэ. Здесь бифуркации получены только при очень высокой плотности тока пучка  $j = 10^4 \text{ A/cm}^2$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенные математические модели и разработанные вычислительные алгоритмы могут эффективно применяться при моделировании нелинейных режимов работы ОЛСЭ, что было подтверждено численными экспериментами. Численные результаты согласуются с аналитическими оценками, полученными в линейном приближении. На основании проведенного анализа можно сделать вывод о возможности численно моделировать работу ОЛСЭ в планируемых экспериментах. Полученные результаты позволяют определять возможные типы неустойчивостей электронного пучка и режимы генерации в геометрии ОРОС, а также их зависимость от различных параметров.

Авторы благодарят В.Г. Барышевского за поддержку и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andruszkow S.* First observation of self-amplified spontaneous emission in a Free-Electron Laser at 109 nm wavelength // *Phys. Rev. Letts.* 2000. V. 85. P. 3825–3829.
2. *Huang Y.C., Hsue C.S., Pantell R.H., Smith T.I.* The FEL and EFEL design study for the proposal NTHU Photon-electron Dynamics Laboratory // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A.* 1999. V. 429. P. 430–434.
3. *Elzhov A.V., Ginzburg N.S., Kaminsky A.K. et al.* Features of FEM for testing of high-gradient accelerating structures of linear colliders // *Proc. Eighth European Particle Accelerator Conf. (EPAC'2002).* Paris, June 3–7, 2002. P. 2308–2310.
4. *Korfer M.* The TTF-FEL status and its future as X-ray user facility // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A.* 2002. V. 483. P. 34–39.
5. *Baryshevsky V.G., Refanchuk I.D.* Parametric beam instability of relativistic charged particles in a crystal // *Phys. Letts.* 1984. V. A102. P. 141–144.
6. *Барышевский В.Г., Феранчук И.Д.* Квантовая теория рентгеновского параметрического генератора с учетом многоволновой дифракции // *Вести АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук.* 1985. № 2. С. 79–86.
7. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Gurinovich A. et al.* First lasing of a volume FEL (VFEL) at a wavelength range 4–6 mm // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A.* 2002. V. 483. P. 21–23.
8. *Барышевский В.Г., Дубовская И.Я., Феранчук И.Д.* Черенковская неустойчивость пучка заряженных частиц, проходящего через трехмерную пространственно-периодическую среду // *Вести АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук.* 1988. № 1. С. 92–97.

9. *Батраков К.Г., Дубовская И.Я.* Черенковская неустойчивость пучка в пространственно-периодической среде // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 1990. № 5. С. 82–89.
10. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Parametric (Quasi-Cherenkov) X-ray Free Electron Laser // J. Phys. D. Appl. Phys. 1991. V. 24. P. 1250–1257.
11. *Барышевский В.Г., Батраков К.Г., Дубовская И.Я.* ЛСЭ на параметрическом (квазичеренковском) излучении // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-эн. наук. 1991. № 1. С. 53–60.
12. *Барышевский В.Г., Батраков К.Г., Дубовская И.Я.* Оптический параметрический лазер на свободных электронах с трехмерной распределенной обратной связью // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. 1992. № 3. С. 99–106.
13. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Induced radiation from a relativistic electron beam in periodic structures // Phys. Stat. Sol. B. 1992. V. 169. P. 235–243.
14. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Surface quasi-Cherenkov free electron laser // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1994. V. A341. P. 274–276.
15. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya., Sytova S.N.* Visible surface quasi-Cherenkov FEL // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1995. V. A358. P. 508–511.
16. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Formation of distributed feedback in an FEL under multi-wave diffraction // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1995. V. A358. P. 493–496.
17. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Parametric X-Ray FEL operating with external Bragg reflectors // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1996. V. A375. P. 292–294.
18. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Volume quasi-Cherenkov FEL in mm-spectral range // Free Electron Lasers. Elsevier Sci. II-75, 1996, 1997.
19. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Stolyarsky V.I.* Application of volume diffraction grating for TeraHertz lasing in volume FEL (VFEL) // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2003. V. A507. P. 93–96.
20. *Baryshevsky V.G.* Volume free electron lasers // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2000. V. A445. P. 281–283.
21. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G.* Dependence of volume FEL (VFEL) threshold conditions on undulator parameters // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2002. V. A483. P. 531–533.
22. *Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S.* Dynamics of free-electron lasers with two-dimensional distributed feedback // Optics Commun. 1994. V. 112. P. 151–156.
23. *Ginzburg N., Rosental R., Peskov N. et al.* Modeling of a planar FEL amplifier with a sheet relativistic electron beam // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2002. V. A483. P. 255–258.
24. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 7. С. 1037–1052.
25. *Гинзбург Н.С., Розенталь Р.М., Сергеев А.С.* О возможности синтеза спектра излучения в секционированной релятивистской ЛОВ // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. № 4. С. 71–80.
26. *Абрашин В.Н., Грубич А.О., Сытова С.Н.* Нелинейная стадия развития черенковской неустойчивости релятивистского электронного пучка // Матем. моделирование. 1991. Т. 3. № 8. С. 21–29.
27. *Сытова С.Н.* Численный метод решения одной задачи ядерной физики // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 1993. № 2. С. 44–50.
28. *Сытова С.Н.* Численный метод решения гиперболической системы с особенностями // Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 7. С. 986–989.
29. *Сытова С.Н.* Математическое моделирование нелинейных процессов излучения электромагнитных волн в объемных лазерах на свободных электронах: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Минск: БГУ, 1997.
30. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya., Sytova S.N.* The nonlinear analysis of visible quasi-Cherenkov FEL // Abstr. 21th Internat. Free Electron Laser Conf. (FEL99). Hamburg, Germany, August 23–28, 1999. Mo-P-16.
31. *Sytova S.* On numerical methods for modeling of terahertz sources based on low energy relativistic beams // Proc. 3rd Internat. Conf. EFS2000. Vilnius: IMI, 2000. P. 237–244.
32. *Сытова С.Н.* Численные методы в моделировании объемных лазеров на свободных электронах // Фундаментальные и прикл. физ. иссл. 1986–2001 гг. Минск: БГУ, 2001. С. 212–226.
33. *Сытова С.Н.* Разностные методы в задачах моделирования объемных лазеров на свободных электронах // Дифференц. ур-ния. 2001. Т. 37. № 7. С. 976–981.
34. *Sytova S.* On numerical methods for one problem of mixed type // Math. Modelling and Analys. 2001. V. 6. № 2. P. 321–326.
35. *Сытова С.Н.* Разностные методы решения обобщенных уравнений переноса // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 7. С. 999–1000.
36. *Batrakov K., Sytova S.* Modelling of quasi-Cherenkov electron beam instability in periodical structures // Math. Modelling and Analys. 2004. V. 9. № 1. P. 1–8.
37. *Чжан Ш.* Многоволновая дифракция рентгеновских лучей в кристаллах. М.: Мир, 1987.
38. *Kim K.* Three-dimensional analysis of coherent amplification and self-amplified spontaneous emission in free electron lasers // Phys. Rev. Letts. 1986. V. 57. P. 1871–1874.
39. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.