

*МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ,
ФИЗИКА*

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ РАЗВИТИЯ ЧЕРЕНКОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

© *В.Н. Абрашин, А.О. Грубич, С.Н. Сытова*

Институт математики АН БССР, Минск; НИИ ядерных проблем при Белгосуниверситете им. В.И. Ленина, Минск

Проведено численное моделирование развития нелинейной стадии абсолютной черенковской неустойчивости релятивистского электронного пучка в монокристалле в рентгеновском диапазоне длин волн. В рамках гидродинамической модели исследованы основные параметры абсолютной черенковской неустойчивости.

NONLINEAR STAGE OF DEVELOPMENT OF THE RELATIVISTIC ELECTRON BEAM CHERENKOV INSTABILITY

V.N. Abrashin, A.O. Grubich, S.N. Sytova

Institute of Mathematics, Byelorussian Academie of Science, Minsk; Institute of Nuclear Problems, V.I. Lenin Byelorussian State University, Minsk.

The numerical modelling of development of the nonlinear stage of the relativistic electron beam absolute Cherenkov instability in monocrystal for Roentgen wavelength range is carried out. The principal parameters of the absolute Cherenkov instability are examined on the basis of the hydrodynamic model.

Введение. В [1] впервые рассмотрено явление черенковской неустойчивости пучка релятивистских заряженных частиц, движущихся в трехмерной пространственно-периодической среде. В случае, когда такой средой является монокристалл, в котором величина пространственного периода определяется периодом кристаллической решетки, испускаемое черенковское излучение имеет длину волны, сравнимую с межатомными расстояниями, т.е. принадлежит рентгеновскому диапазону. Соответствующий механизм спонтанного рентгеновского черенковского излучения – параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) – предсказан в [2] и экспериментально обнаружен (см. [3]). Линейная стадия развития черенковской неустойчивости релятивистского электронного пучка (РЭП) в монокристалле в настоящее время достаточно полно исследована теоретически: найдены пространственные и временные инкременты и пороговые условия возникновения абсолютной черенковской неустойчивости с учетом поглощения рентгеновского излучения в веществе, а также с учетом температуры пучка и его многократного рассеяния на атомах кристалла [1, 4, 5]. Нелинейная же стадия развития неустойчивости до сих пор не исследовалась.

В настоящей работе дан численный анализ развития нелинейной стадии

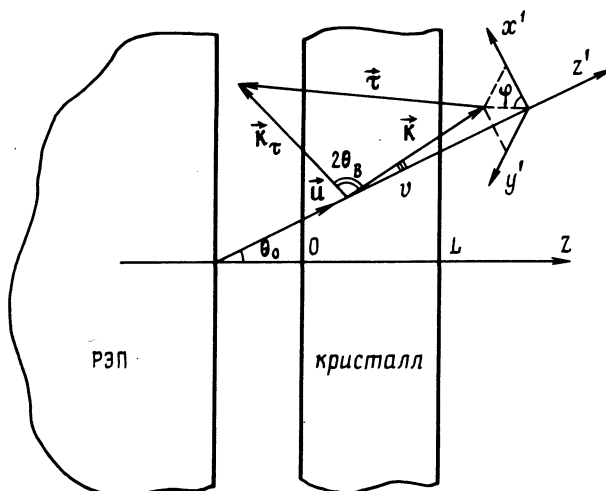


Рис. 1. Взаимное положение РЭП и кристалла в момент времени $t < t_0$

черенковской неустойчивости РЭП в монокристалле в случае достаточно простой модели: РЭП описывается в гидродинамическом приближении, не рассматривается многократное рассеяние частиц РЭП в кристалле, не учитывается поглощение излучения. Сделаны также другие, менее существенные упрощения, указанные ниже. Тем не менее результаты численного анализа рассматриваемой модельной задачи представляют, по нашему мнению, определенный интерес, поскольку впервые дают количественную картину развития нелинейной стадии неустойчивости. В частности, проведенное моделирование показало, что режим абсолютной неустойчивости системы "электромагнитная волна + РЭП + кристалл" оказывается существенно нелинейным. Полученные данные могут быть использованы при планировании экспериментов по обнаружению черенковской неустойчивости РЭП в кристалле в рентгеновском диапазоне длин волн.

1. Физическая модель. Полагаем, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ монохроматичный и абсолютно холодный полубесконечный РЭП "падает" под углом θ_0 на полубесконечную монокристаллическую пластинку толщиной L . Полагаем также, что при $t > t_0$ РЭП пересекает в кристалле под углом θ_B некоторое семейство основных кристаллических плоскостей, заданных вектором обратной решетки τ , причем взаимная ориентация РЭП и кристалла таковы, что для спонтанного ПРИ реализована геометрия дифракции Брэгга (см. рис. 1). Пусть параллельно с направлением движения РЭП (вдоль направления вектора скорости u) на монокристаллическую пластинку падает плоская электромагнитная волна с частотой ω , близкой к частоте Брэгга $\omega_B = |\tau|c/(2\sin\theta_B)$, где c — скорость света. Задача заключается в исследовании усиления указанной сигнальной волны в кристалле РЭП.

Геометрия дифракции, изображенная на рис. 1, — двухволновая дифракция по Брэггу. Волновой вектор дифрагированной волны $k_\tau = k + \tau$, где k — волновой вектор рентгеновского фотона, распространяющегося в кристалле вдоль движения РЭП. Известно [6], что в случае двухволновой динамической дифракции волновой вектор k имеет в общем случае два собственных значения, определяемых решениями соответствующего дисперсионного уравнения. Однако только для одного из значений волнового вектора выполняется условие Вавилова—Черенкова [1, 2]

$$\omega - ku = 0, \quad (1)$$

а именно для значения k , которому соответствует показатель преломления $n(\omega) > 1$. Поскольку усиливаться в кристалле РЭП может только излучение с волновым

вектором, удовлетворяющим условию (1), то ради простоты будем описывать поле излучения в кристалле в одномодовом приближении, полагая, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t) \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)) + \mathbf{E}_\tau(z, t) \exp\{i[(\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{r} - \omega t]\}, \quad (2)$$

где вектор \mathbf{k} – собственное значение волнового вектора свободного поля излучения в кристалле, удовлетворяющее условию (1).

Полагаем также, что величина угла Брэгга $\theta_{\text{в}}$ близка к $\pi/4$. В этом случае поле излучения в кристалле линейно поляризовано в направлении, перпендикулярном плоскости дифракции, определяемой векторами \mathbf{k} и $\boldsymbol{\tau}$: $\mathbf{E} \parallel \mathbf{E}_\tau \parallel [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}]$.

Считая, что амплитуды поля $E(z, t)$ и $E_\tau(z, t)$ меняются в пространстве и времени достаточно медленно:

$$\begin{aligned} |(1/k) \partial E / \partial z| &\ll |E|, & |(1/k) \partial E_\tau / \partial z| &\ll |E_\tau|, \\ |(1/\omega) \partial E / \partial t| &\ll |E|, & |(1/\omega) \partial E_\tau / \partial t| &\ll |E_\tau|, \end{aligned} \quad (3)$$

воспользуемся ниже приближением медленно меняющихся амплитуд.

Возмущение скорости и плотности РЭП в гидродинамической модели запишем, по аналогии с (2), в виде произведения медленно и быстро меняющихся компонент:

$$\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(z, t) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \delta n(\mathbf{r}, t) = n(z, t) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (4)$$

2. Линейное приближение. В [1] найден пространственный инкремент черенковской неустойчивости:

$$\text{Im } k_z = (\sqrt{3}/2) (Q g_\tau^2 \omega_0 / \{u^2 c^2 k_{z0} [g_\tau^2 + (1+v)(\eta + \xi)^2]\})^{1/3}, \quad (5)$$

где

$$Q = -[\omega_\pi^2 \beta^2 \theta^2 k_0 c (k_0 c - \omega_0 \beta \cos \theta)] / (2\omega_0 \gamma), \quad k_{z0} = k_z^0 (1 + \delta),$$

$$\omega_0 = k_z^0 u (1 + \delta),$$

$$k_z^0 = -(2k_\perp \tau_\perp + \tau^2) / (2\tau_z),$$

$$\delta = [g_\tau^2 - (\eta + \xi)^2] / [2v(\eta + \xi)],$$

$$v = \tau_z / k_{z0}, \quad \eta = k_\perp^2 / k_{z0}^2, \quad \xi = 1 - \beta^2 \epsilon_0,$$

$$\epsilon_0 = 1 + g_0,$$

$$\beta = u/c, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

$$\omega_\pi^2 = 4\pi e^2 n_b / m_e,$$

θ – угол между \mathbf{k} и осью z ,

n_b – невозмущенная плотность частиц пучка,

$g_0, g_\tau, g_{-\tau}$ – коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки.

Пороговое значение плотности тока РЭП $j_{\text{порог}} = |e| u n_b$, начиная с которого возможно развитие абсолютной черенковской неустойчивости, определяется из равенства [5]

$$\begin{aligned} &(\sqrt{3}/2) k L \{ (\omega_\pi / \omega)^2 [\sin^2 \varphi / (2\gamma)] (-\beta) r' [y + x / (2\beta) - |g_0^p| / \sqrt{r'}] [y - x / (2\beta)] \times \\ &\times [y + x / (2\beta) - |g_0^p| / \sqrt{r'}] / x \}^{1/3} = [k \epsilon_0'' L / (-\beta)] \{ (1 - \beta) [(1 + \beta)^2 y + (1 + \beta) x / 2] - \\ &- 4\beta \sqrt{r'} \} / x + \gamma_0 \ln \{ 3 [y - x / (2\beta)] / [y + x / (2\beta)] \}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$y = \sqrt{[x / (2\beta)]^2 - 1 / \beta}, \quad x = -n / [k \sqrt{r'} L / (4\pi\gamma_0\beta)],$$

$$\beta = \gamma_0 / \gamma_1, \quad \gamma_1 = \mathbf{kN} / (\omega c), \quad \gamma_0 = \mathbf{k}_\tau \mathbf{N} / (\omega c),$$

\mathbf{N} – нормаль к внешней стороне задней стенки кристалла,

n – целое число,

$$r = g_{\tau} g_{-\tau}, \quad r' = \operatorname{Re}(r), \quad \epsilon_0'' = \operatorname{Im}(\epsilon_0),$$

$$|g_0^p| = |g_0'| + \gamma^{-2}.$$

В случае выполнения неравенства $j < j_{\text{порог}}$ в системе "излучение+РЭП+ кристалл" может возникнуть только конвективная неустойчивость.

3. Математическая модель и схема численного моделирования. Из уравнений Максвелла, движения и непрерывности получим систему уравнений, описывающую взаимодействие электромагнитного поля в кристалле с РЭП:

$$\partial E/\partial t + A_{11} \partial E/\partial z + A_{12} \partial E_{\tau}/\partial z + Q_{11} E + Q_{12} E_{\tau} = f_1(n, v, \partial n/\partial t, \partial v/\partial t), \quad (7)$$

$$\partial E_{\tau}/\partial t + A_{21} \partial E/\partial z + A_{22} \partial E_{\tau}/\partial z + Q_{21} E + Q_{22} E_{\tau} = f_2(n, v, \partial n/\partial t, \partial v/\partial t), \quad (8)$$

$$\partial n/\partial t + u \partial n/\partial z + S n = f_3(v, \partial v/\partial z), \quad (9)$$

$$\partial v/\partial t + u \partial v/\partial z + S v = f_4(E, v, \partial E/\partial z, \partial E/\partial t), \quad (10)$$

где

$$A_{11} = k_z c^2 \epsilon_0 / (\omega g),$$

$$A_{12} = -k_{\tau z} c^2 g_{\tau} / (\omega g),$$

$$A_{21} = -k_z c^2 g_{-\tau} / (\omega g),$$

$$A_{22} = k_{\tau z} c^2 \epsilon_0 / (\omega g),$$

$$Q_{11} = (-i\omega/2) [(-k^2 c^2 / \omega^2 + \epsilon_0) \epsilon_0 - r] / g,$$

$$Q_{12} = (-i\omega/2) g_{\tau} (k_{\tau}^2 c^2 / \omega^2) / g,$$

$$Q_{21} = (-i\omega/2) g_{-\tau} (k^2 c^2 / \omega^2) / g,$$

$$Q_{22} = (-i\omega/2) [(-k_{\tau}^2 c^2 / \omega^2 + \epsilon_0) \epsilon_0 - r] / g,$$

$$f_1 = 2i\pi |e| \epsilon_0 f / (\omega g C),$$

$$f_2 = 2i\pi |e| g_{-\tau} f / (\omega g C),$$

$$C = 1 \Gamma^{1/2} c^{-1} \text{ см}^{-1/2},$$

$$f = n_b (\partial v/\partial t e_{\sigma}) - i \omega n_b (v e_{\sigma}) + (u e_{\sigma}) \partial n/\partial t - i \omega (u e_{\sigma}) n_b,$$

$$g = \epsilon_0^2 - r,$$

$$u = u_z,$$

$$S = i(\mathbf{k}u - \omega),$$

$$f_3 = -in_b(\mathbf{k}v) - n_b \partial v_z / \partial z,$$

$$f_4 = -[|e| C / (m\gamma)] (E e_{\sigma} + 1/c [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] + (1/c [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] - (1/c^2) E \{ \mathbf{u}(u e_{\sigma}) + \mathbf{v}(v e_{\sigma}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] + \mathbf{u}(v e_{\sigma}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] \}),$$

$$\mathbf{B} = (c/\omega [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\sigma}]) E - (ic/\omega [\mathbf{N} \times \mathbf{e}_{\sigma}]) \partial E/\partial z - (ic/\omega^2 [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\sigma}]) \partial E/\partial t,$$

$$\mathbf{e}_{\sigma} = [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}] / |\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}| \text{ – единичный вектор } \sigma \text{-поляризации,}$$

Математическая модель (7)–(10) должна быть дополнена начальными и граничными условиями, заданными в области $G = \{(z, t), 0 \leq z \leq L, 0 \leq t \leq T\}$:

$$\left. \begin{aligned} E(z, 0) = 1, \quad E_{\tau}(z, 0) = -Q_{11}/Q_{12} \\ \mathbf{v}(z, 0) = \hat{0}, \quad n(z, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } 0 \leq z \leq L,$$

(11)

$$\left. \begin{aligned} E(0, t) = 1, \quad E_{\tau}(L, t) = -Q_{11}/Q_{12} \\ \mathbf{v}(0, t) = 0, \quad n(0, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } 0 < t \leq T.$$

Система (7)–(11) является системой квазилинейных уравнений гиперболического типа относительно комплекснозначных переменных

$$E(z, t), E_\tau(z, t), \quad v(z, t) \text{ и } n(z, t).$$

Из дисперсионного уравнения, соответствующего линеаризованным уравнениям (7)–(8) в отсутствие пучка, следует, что $\det(Q_{ij}) = 0$. Кроме этого, $|A_{11}| \gg |A_{12}|$, $|A_{22}| \gg |A_{21}|$ и коэффициенты A_{11} и A_{22} противоположны по знаку. Можно показать (см. [7]), что начальные и граничные условия (11) корректны и обеспечивают существование единственного решения из класса C_1 . Отметим, что с физической точки зрения условия (11) некорректны, поскольку на задней грани кристалла ($z = L$) амплитуда дифрагированной волны должна быть равна 0. Начально-граничные условия (11) обусловлены использованием приближенного выражения (2). Однако поскольку условие (1) выполняется только для одной из мод, соответствующей (2), можно ожидать, что решение системы уравнений (7)–(11) будет достаточно хорошо аппроксимировать решение точной задачи. Действительно, найденные ниже решения удовлетворительно согласуются со значениями инкремента (5) и порога (6), следующими из линейного описания черенковской неустойчивости.

Для решения задачи сначала использовались неявный метод Эйлера, метод расщепления, метод суммарной аппроксимации. Но они приводили к неудачам: неустойчивые решения, серьезные ограничения на временной шаг и, как следствие, неприемлемое возрастание времени счета. Задача решена с помощью варианта метода переменных направлений, предложенного в [8]. В работе использованы обозначения из [9]. Приведенная ниже схема не содержит итераций и поэтому экономична.

Область непрерывного изменения переменных G заменяется сеточной областью

$$G_{h_z, h_t} = \{(z_k, t_j), \quad z_k = (k-1)h_z, \quad k = 1, 2, \dots, N_1, \\ N_1 = [L/h_z], \quad t_j = (j-1)h_t, \quad j = 1, 2, \dots, N_2; \quad N_2 = [T/h_t]\}.$$

На сетке G_{h_z, h_t} система (7)–(10) аппроксимируется с порядком $O(h_z + h_t)$ следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{aligned} v_t^1 + u \hat{v}_z^1 + S v^2 &= F_4 ((E^1 + E^2)/2, (v^1 + v^2)/2), \\ v_t^2 + u \hat{v}_z^2 + S \hat{v}^2 &= F_4 ((E^1 + E^2)/2, (v^1 + v^2)/2), \\ n_t^1 + u \hat{n}_z^1 + S n^2 &= \hat{F}_3 ((v^1 + v^2)/2), \\ n_t^2 + u \hat{n}_z^2 + S \hat{n}^2 &= \hat{F}_3 ((v^1 + v^2)/2), \\ E_t^1 + A_{11} \hat{E}_z^1 + A_{12} E_{\tau z}^1 + Q_{11} E^2 + Q_{12} E_\tau^2 &= \hat{F}_1 ((v^1 + v^2)/2, (n^1 + n^2)/2), \\ E_{\tau t}^1 + A_{21} \hat{E}_z^1 + A_{22} \hat{E}_{\tau z}^1 + Q_{21} E^2 + Q_{22} E_\tau^2 &= \hat{F}_2 ((v^1 + v^2)/2, (n^1 + n^2)/2), \\ E_t^2 + A_{11} \hat{E}_z^2 + A_{12} \hat{E}_{\tau z}^2 + Q_{11} \hat{E}^2 + Q_{12} \hat{E}_\tau^2 &= \hat{F}_1 ((v^1 + v^2)/2, (n^1 + n^2)/2), \\ E_{\tau t}^2 + A_{21} \hat{E}_z^2 + A_{22} \hat{E}_{\tau z}^2 + Q_{21} \hat{E}^2 + Q_{22} \hat{E}_\tau^2 &= \hat{F}_2 ((v^1 + v^2)/2, (n^1 + n^2)/2), \end{aligned} \quad (12)$$

где $E^1, E^2, E_\tau^1, E_\tau^2, v^1, v^2, n^1, n^2$ – пары приближенных значений E, E_τ, v, n соответственно.

Начальные и граничные условия для разностной задачи (12) на G_{ht} аппроксимируются точно:

$$\left. \begin{aligned} E^{1,2}(z, 0) = 1, \quad E_T^{1,2}(z, 0) = -Q_{11}/Q_{12} \\ v^{1,2}(z, 0) = 0, \quad n^{1,2}(z, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } 0 \leq z \leq L, \\ \left. \begin{aligned} E^{1,2}(0, t) = 1, \quad E_T^{1,2}(L, t) = -Q_{11}/Q_{12} \\ v^{1,2}(0, t) = 0, \quad n^{1,2}(0, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } 0 < t \leq T. \quad (13)$$

В качестве решения в каждой точке области G_{ht} берется полусумма приближенных значений искоемых переменных.

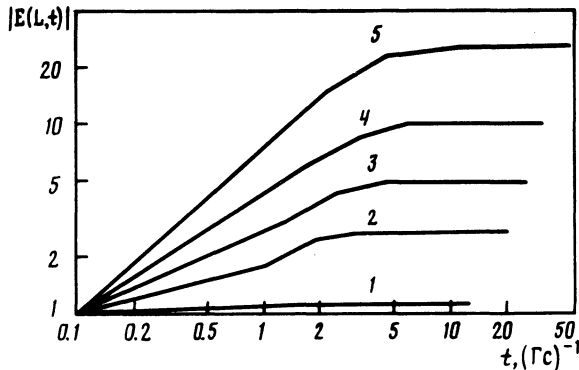


Рис. 2. Зависимость амплитуды проходящей волны от времени

4. Результаты моделирования. Как отмечалось выше, в системе "электромагнитная волна+РЭП+кристалл" возможно возникновение двух видов неустойчивости: конвективной и абсолютной ([10]). Поскольку рассматривается гидродинамическое приближение и РЭП считается абсолютно холодным (отсутствует разброс по импульсам частиц РЭП), то в случае выполнения условия Вавилова—Черенкова (1) в системе возникнет конвективная неустойчивость. Если одновременно с выполнением условия (1) плотность тока окажется настолько большой, что превысит пороговое значение $j_{\text{порог}}$, определяемое (6), то в системе будет

Т а б л и ц а 1

Номер кривой	ΓL	$j/j_{\text{порог}}$
1	0,41	0,33
2	0,71	1,67
3	0,89	3,33
4	1,12	6,67
5	1,52	16,67

Т а б л и ц а 2

Обозначения	Рис. 3: L , см	Рис. 4: j , МА/см ²
▽	0,05	$4,8 \cdot 10^2$
△	0,1	$2,4 \cdot 10^3$
□	0,2	$4,8 \cdot 10^3$
○	0,5	$9,6 \cdot 10^3$
■	1	$2,4 \cdot 10^4$

развиваться абсолютная неустойчивость. Численно решая систему уравнений (7)–(11), проследим за режимом конвективной неустойчивости, порогом возникновения абсолютной неустойчивости и нелинейной стадией ее развития.

Расчеты проводились для случая усиления падающей волны (см. (11)) в монокристалле кремния при дифракции рентгеновских фотонов на плоскостях (220) ($d = 1,92 \text{ \AA}$, $\omega_{\text{в}} = 6,94 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$, $g_0 = -6,52 \cdot 10^{-5}$, $g_{\tau} = g_{-\tau} = 3,68 \cdot 10^{-5}$, $\theta_{\text{в}} = \pi/4$). Угол падения $\theta_0 = 0,7 \text{ рад}$, $\vartheta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$, $\varphi = \pi/2$. Для заданных параметров из (1) следует $\Delta = (\omega - \omega_{\text{в}})/\omega_{\text{в}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$. Лоренц-фактор частиц РЭП $\gamma = 500$. Толщина кристалла L варьировалась в диапазоне $0,05 \div 1 \text{ см}$, плотность

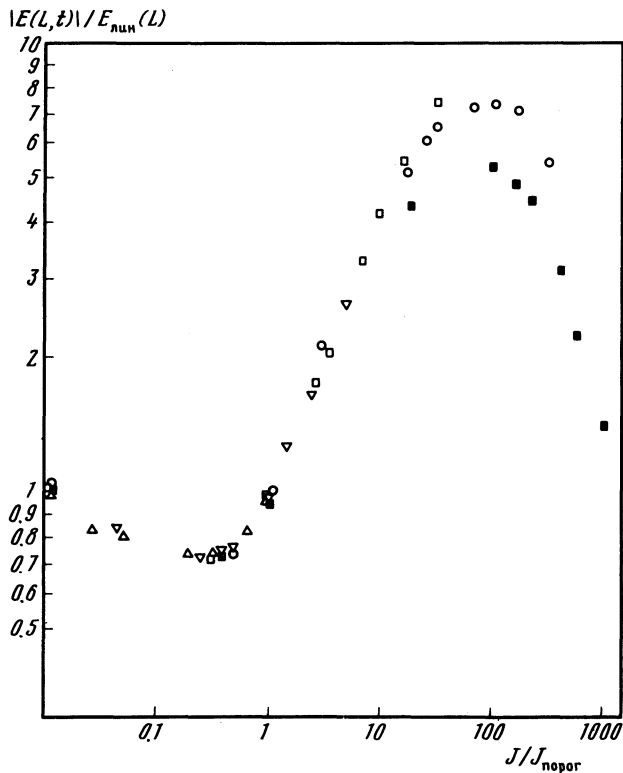


Рис. 3. Зависимость амплитуды проходящей волны от плотности тока пучка

тока РЭП $4,8 \text{ MA/cm}^2 \div 4,8 \cdot 10^4 \text{ MA/cm}^2$. На рис. 2 изображена зависимость амплитуды проходящей волны от времени (в единицах $(\Gamma \text{ c})^{-1}$, где $\Gamma = \text{Im } k_z$, см. (5)) при толщине пластинки $L = 0,2 \text{ см}$ для различных плотностей тока пучка ($j_{\text{порог}} = 1,44 \cdot 10^3 \text{ MA/cm}^2$). Номера кривых на рис. 2 соответствуют значениям параметров из табл. 1. Зависимость величины поля волны при $z = L$ от различных значений j и L изображена на рис. 3 и 4 (соответствующие обозначения и параметры находятся в табл. 2). Момент наблюдения на рис. 3 и 4 соответствует временам $t \gg (\Gamma \text{ c})^{-1}$. Подчеркнем, что величина поля на рис. 3 и 4 измеряется в единицах амплитуды проходящей волны, предсказываемой линейной теорией:

$$E_{\text{лин}}(L) = E(0, t) \exp(\Gamma L). \quad (14)$$

1. Конвективная неустойчивость ($j < j_{\text{порог}}$). На рис. 2 режиму конвективной неустойчивости соответствует кривая 1 ($j/j_{\text{порог}} = 0,33$). Как и следовало ожидать в этом случае, амплитуда напряженности поля на задней грани кристалла ($z = L = 0,2 \text{ см}$) практически не зависит от времени. Результаты численного анализа, изображенные на рис. 3, показывают, что в режиме конвективной неустойчивости величина напряженности поля проходящей электромагнитной волны незначительно отличается от значений, следующих из линейной теории, т.е. нелинейность в этом режиме проявляется слабо. Результаты расчетов, приведенные на рис. 3, соответствуют значениям толщины кристалла $L = 0,05 \div 1 \text{ см}$ (см. табл. 2). На первый взгляд можно предположить, что при достаточном увеличении L наступит существенно нелинейная стадия конвективной неустойчивости. Это предположение, однако, неверно. Как следует из результатов, изображенных на рис. 4, существенно нелинейная стадия неустойчивости в системе начи-

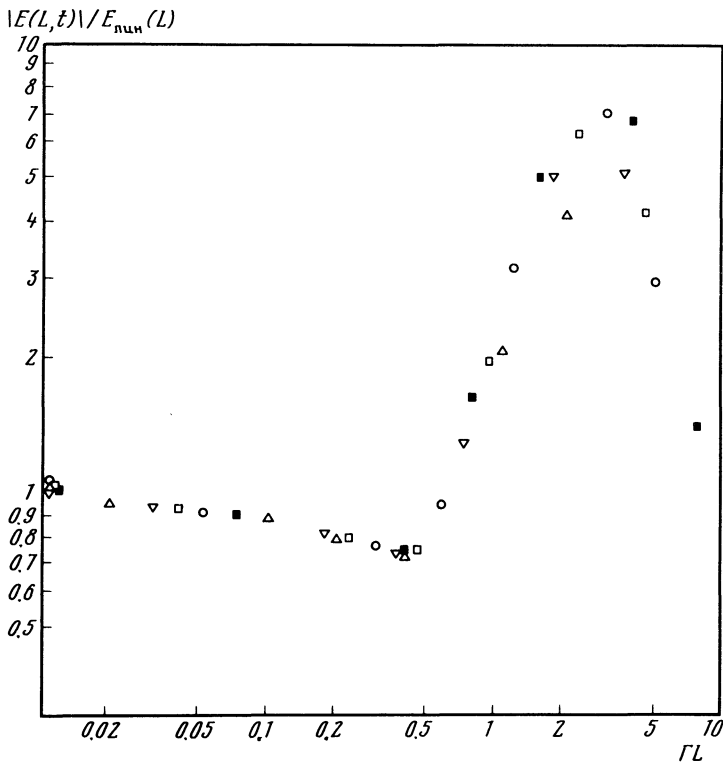


Рис. 4. Зависимость амплитуды проходящей волны от толщины кристалла

нается со значений безразмерного параметра $\Gamma L > 0,5$ независимо от величины плотности тока РЭП. Из анализа (6) при $\epsilon_0'' = 0$ (напомним, что поглощение излучения в веществе мы здесь не учитываем, полагая $\epsilon_0'' = 0$) следует, что условие $j/j_{\text{порог}} > 1$ однозначно соответствует неравенству $\Gamma L > \text{const}$, причем в рассматриваемом случае (см. заданные величины d , θ_v , g_0 и т.д.) указанная константа не меньше 0,5. Поэтому переход решения в области $\Gamma L > 0,5$ к нелинейному режиму обусловлен развитием уже абсолютной неустойчивости. Таким образом, в рассматриваемой модели ($\epsilon_0'' = 0$) при любых значениях параметров конвективная неустойчивость удовлетворительно описывается известным линейным решением (14).

2. Порог абсолютной неустойчивости. Стационарный режим усиления. Существенное изменение зависимости амплитуды проходящей волны от времени при плотности тока РЭП ниже и выше порога иллюстрируют на рис. 2 кривые 1 и 2, величина отношения $j/j_{\text{порог}}$ равна соответственно 0,33 и 1,67. Как и следовало ожидать, в случае перехода к режиму абсолютной неустойчивости (кривые 2–5) наблюдается существенное возрастание амплитуды электромагнитного поля во времени. На временах $t \gg (\Gamma c)^{-1}$ увеличение напряженности поля во времени прекращается и в системе устанавливается стационарный режим. Результаты расчетов, изображенные на рис. 2, демонстрируют тенденцию увеличения времени перехода к стационарному режиму при увеличении плотности тока РЭП, падающего на кристалл. Из проведенных нами расчетов также следует, что время выхода на плато тем больше, чем больше толщина кристалла.

3. Абсолютная неустойчивость ($j > j_{\text{порог}}$). Из результатов расчетов, изображенных на рис. 2–4, следует, что в случае абсолютной неустойчивости зависимость решения от переменных t , j и L существенно нелинейна.

Например, в областях $j \geq 50 j_{\text{порог}}$ и $GL \geq ?$ (см. рис. 3 и 4) величина амплитуды поля в 5 ÷ 8 раз превосходит значения, задаваемые (14). В заключение отметим, что результаты численного анализа, изображенные на рис. 4 в безразмерных единицах, характеризуются относительно небольшим разбросом величин при изменении параметра j почти на два порядка (см. табл. 2). Таким образом, можно говорить о квазиавтомодельности нелинейного решения в случае развития абсолютной черенковской неустойчивости.

Авторы выражают благодарность В.Г. Барышевскому за постоянное внимание и поддержку в работе, а также К.Г. Батракову и В.В. Скадорову за полезное обсуждение вопросов, рассмотренных в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский В.Г., Дубовская И.Я., Феранчук И.Д. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н. – 1988. – № 1. – С. 92–97.
2. Барышевский В.Г., Феранчук И.Д. // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 944.
3. Адищев Ю.Н., Барышевский В.Г., Воробьев С.А. и др. // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 41, № 7. – С. 295–297.
4. Барышевский В.Г., Дубовская И.Я., Батраков К.Г. Тезисы докладов XIX Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. Москва, 29–31 мая 1989 г. – М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 83.
5. Барышевский В.Г., Дубовская И.Я., Батраков К.Г. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1991. – № 1.
6. Пинскер З.Г. Рентгеновская кристаллооптика. – М.: Наука, 1982. – 390 с.
7. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
8. Абрашин В.Н. // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 314–323.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 614 с.
10. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. Сер. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1979. – Т. 10. – 527 с.

Поступила в редакцию
19.11.90