

Лабораторная работа 2

СТАТИСТИКА ЯДЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: изучить важнейшие статистические законы экспериментальной ядерной физики.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В экспериментальной ядерной физике чаще всего встречаются задачи, связанные с регистрацией явлений, происходящих в микромире. Это могут быть радиоактивные распады атомных ядер, распады нестабильных элементарных частиц, разнообразные ядерные реакции и т. д. Все это принципиально случайные процессы, и они должны изучаться статистическими методами, т. е. на языке вероятностей и средних значений.

Изучение такого кажущегося хаоса микрособытий показывает, что он подчиняется вполне определенным статистическим закономерностям, а измерительная аппаратура может давать на выходе отсчеты, сохраняющие эти закономерности. В большинстве случаев отсчеты представляют собой статистическую выборку из частиц (попаданий), поступающих на вход. Однако так бывает не всегда: существенное влияние мертвого времени или наличие пересчетной схемы приводит к нестатистической выборке, и первоначальное распределение искажается.

Ниже рассматриваются только статистические выборки для отсчетов, которые с учетом эффектов регистрации просто будут иметь меньшие интенсивности, чем интенсивности частиц на входе.

В данной работе изучаются важнейшие статистические законы, без знания которых невозможно правильно оценить результаты ядерно-физических измерений.

Биномиальный закон распределения

Рассмотрим подробнее радиоактивный распад атомных ядер. Важнейшей статистической характеристикой этого процесса является вероятность λ распада ядра за единицу времени. Она называется постоянной распада, потому что в широких пределах не зависит от внешних факторов (температуры, давления, электромагнитных полей и др.) и, что очень важно, не зависит от начала отсчета времени (это значит, что вероятность распада

ядра за конечный интервал времени t зависит только от величины этого интервала, но не от его положения на оси времени).

Радиоактивные распады атомных ядер являются классическим примером случайных процессов, приводящих к широко известному биномиальному закону распределения, или распределению Бернулли.

Сформулируем условия, приводящие к этому закону.

1. Существование только двух возможных исходов для ядра: распад – отсутствие распада.
2. Неразличимость ядер одного сорта.
3. Взаимная статистическая независимость отдельных распадов.
4. Ограниченность числа радиоактивных ядер.

В указанном случае этот закон устанавливает связь между числом радиоактивных ядер N , средним числом распадов \bar{k} за время t и наблюдаемым случайным числом распадов k за это же время. Другими словами, этот закон дает вероятность $P(k | \bar{k}, N)$ осуществления k распадов при заданных значениях \bar{k} и N :

$$P(k | \bar{k}, N) = C_N^k \left(\bar{k}/N\right)^k \left(1 - \bar{k}/N\right)^{N-k}. \quad (1)$$

Множитель C_N^k представляет собой число сочетаний из N по k и появляется в (1) вследствие указанной выше неразличимости ядер. Отношение \bar{k}/N имеет очевидный смысл вероятности распада одного ядра за время t (не путать с λ !), а множитель $(\bar{k}/N)^k$ есть вероятность распада k ядер за то же время t при условии взаимной статистической независимости их распадов. Последний множитель $(1 - \bar{k}/N)^{N-k}$ есть вероятность того, что остальные $(N - k)$ ядер за время наблюдения не распадутся.

Часто закон (1) записывается в форме

$$P(k, f, N) = \frac{N!}{k!(N-k)!} f^k (1-f)^{N-k}, \quad (1')$$

где $f = \bar{k}/N$ – упоминавшаяся выше вероятность распада одного ядра, а множитель с факториалами – C_N^k .

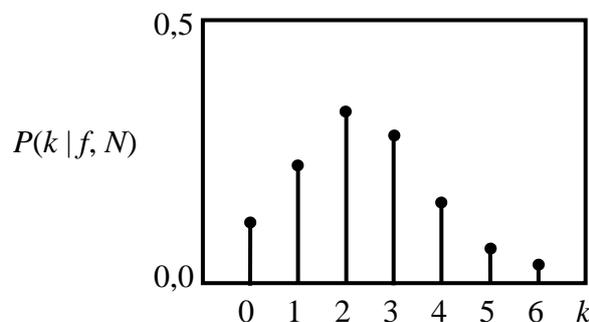


Рис. 1. Биномиальное распределение для $N = 8$ и $f = 0,3$

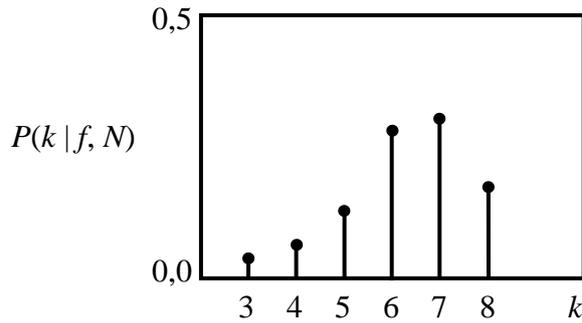


Рис. 2. Биномиальное распределение для $N = 8$ и $f = 0,8$

Для наглядности на рис. 1 и 2 представлены биномиальные распределения для одинаковых N и разных f .

Обратите внимание на резкий обрыв распределения на рис. 2 справа. Это происходит потому, что $P(9) = 0$, так как полное число распадающихся ядер равно 8.

При наблюдении короткоживущих распадающихся состояний ($T_{1/2} < t$) или при ограниченном числе радиоактивных ядер, когда нельзя считать N бесконечно большим, следует пользоваться только биномиальным законом в форме (1) или (1').

Отметим также, что при идентификации новых элементарных частиц и новых химических элементов, когда счет открываемых частиц и атомов идет даже не на десятки, а на единицы, альтернативы закону (1) нет.

Закон Пуассона

Часто в эксперименте используются такие радиоактивные источники, что с полным основанием число радиоактивных ядер в них N можно считать бесконечно большим. В этом случае закон распределения вероятностей (1) существенно упрощается и, если k остается конечным при $N \rightarrow \infty$ (т. е. вероятность распада $f = \bar{k}/N \rightarrow 0$), переходит в закон Пуассона.

Действительно, нетрудно убедиться, что при выполнении указанных условий из (1) получается распределение вида

$$P(k | \bar{k}) = \bar{k}^k e^{-\bar{k}} / k!. \quad (2)$$

При получении выражения (2) использовались соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-k)!k!} = \frac{N^k}{k!}; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{k}}{N}\right)^{N-k} = e^{-\bar{k}}.$$

Распределение (2) и есть закон Пуассона. Он определяет вероятность того, что случайная величина (число распадов, число комптоновских электронов;

число ядерных расщеплений и т. д.) примет значение k , если известно ее среднее значение \bar{k} и если $N \rightarrow \infty$. Обратим внимание, что распределение (2) зависит только от \bar{k} , т. е. в отличие от закона (1) оно является однопараметрическим.

На рис. 3 приведено пуассоновское распределение вероятностей (2) для $\bar{k} = 2,5$. При увеличении \bar{k} распределение становится симметричным и стремится к нормальному.

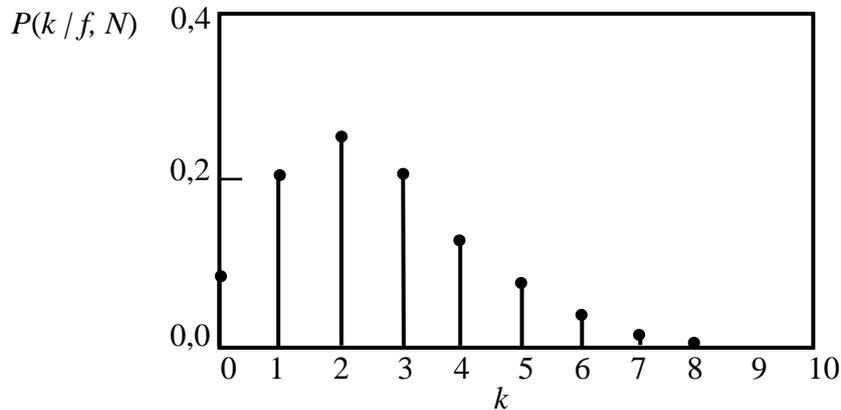


Рис. 3. Распределение Пуассона для $\bar{k} = 2,5$

Следует иметь в виду, что распределение Пуассона (2) может выступать не как асимптотическое, а как совершенно точное. Поэтому необходимо четко сформулировать условия его возникновения.

1.Случайная величина (число отсчетов) может принимать только целые положительные значения, включая 0.

2.Распределение Пуассона описывает редкие события – вероятность двух (и более) событий на достаточно малом временном или пространственном интервале бесконечно мала по сравнению с вероятностью одного события. Это свойство называется ординарностью.

3.События должны быть статистически независимыми (во времени или пространстве).

4.Время (или пространство) должно быть однородным для изучаемых событий. В этом случае поток событий можно считать стационарным, т. е. не зависящим от начала отсчета временной или пространственной координаты.

Можно доказать, что если все эти условия выполняются, то распределение соответствующих вероятностей оказывается пуассоновским (2).

Приведем некоторые примеры, в которых нарушаются условия формирования распределения (2). Например, парное рождение частиц нарушает все условия (1–4); влияние мертвого времени нарушает условия 3 и 4.

Закон Пуассона в форме (2) не содержит в явном виде информацию о том, какое именно распределение (временное или пространственное) изучается. Число \bar{k} может быть средним числом событий за время t , тогда $\bar{k} = nt$, где n – среднее число событий за единицу времени, т. е., их интенсивность. Но \bar{k}

может быть и средним числом событий в данном элементе пространства, тогда n будет иметь смысл пространственной интенсивности.

В настоящей работе изучается временное распределение Пуассона, т. е. $\bar{k} = nt$:

$$P(k | n, t) = (nt)^k e^{-nt} / k!$$

Напомним, что любое статистическое распределение должно быть нормировано согласно требованию, чтобы вероятность достоверного события равнялась единице. В нашем случае условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{k}^k e^{-\bar{k}} / k! = 1 \quad (3)$$

выполняется в силу известного тождества:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! = e^x.$$

Графически условие (3) означает, что сумма длин всех ординат распределения на рис. 3 должна равняться единице.

Важнейшими характеристиками статистического распределения являются среднее значение и дисперсия. Среднее значение \bar{k} определяет положение распределения на оси абсцисс, а дисперсия D – разброс случайных значений относительно этого среднего. Для дискретных законов распределения $P(k)$ среднее значение и дисперсия случайной величины k определяются соответственно:

$$\bar{k} = \sum k \cdot P(k), \quad (4)$$

$$D_k = \sum (k - \bar{k})^2 \cdot P(k). \quad (5)$$

Суммирование в выражениях (4) и (5) проводится по всем k ; $P(k)$ – вероятность соответствующего значения k .

Если использовать распределение Пуассона (2), то из (5) получается

$$D_k = \bar{k}. \quad (6)$$

Такая связь между дисперсией и средним значением случайной величины характерна только для пуассоновского распределения и является его отличительным признаком.

Введем также понятие среднеквадратической (стандартной) ошибки σ , связанной с дисперсией соотношением

$$\sigma_k = \sqrt{D_k}. \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) следует, что относительная статистическая ошибка измерения случайной величины k , распределенной по закону Пуассона,

$$\delta_k = 1 / \sqrt{\bar{k}}. \quad (8)$$

Как правило, основной целью многих экспериментальных задач ядерной физики являются измерение среднего значения случайной величины \bar{k} и оценка погрешности этого измерения. Так из выражения (8) следует, что погрешности в 1 % соответствует $\bar{k} = 10\,000$. И если для получения такого количества импульсов затрачено время t , то никакое дробление во времени уже не увеличит эту ошибку. Например, интенсивность отсчетов, т. е. скорость счета $n = \bar{k}/t$, будет известна с той же относительной ошибкой (1 %), что и \bar{k} .

Нормальное распределение

Анализ выражения (2) показывает, что по мере роста \bar{k} распределение становится симметричным. При малых \bar{k} оно резко асимметрично из-за отсутствия хвоста слева (отрицательные значения k запрещены), при выполнении неравенства $\sqrt{\bar{k}} \gg 1$ становится полностью симметричным. Однако условие $\sqrt{\bar{k}} \gg 1$ означает, что вероятности близких значений k будут почти одинаковы, и в этом случае целесообразно изменить саму постановку задачи, т. е. рассматривать вероятность не отдельного возможного значения k , а вероятность попадания k в заданный интервал значений Δk вблизи некоторого фиксированного значения k . Тем самым совершается переход от дискретного распределения к непрерывному.

При выполнении условия $\sqrt{\bar{k}} \gg 1$ из закона (2) получается нормальный закон распределения, или закон Гаусса. Этот закон распределения встречается очень часто и играет исключительно важную роль в статистике многих физических процессов. Более того, это самый широко распространенный статистический закон в природе. Центральная предельная теорема дает условия его формирования: если случайную величину k можно представить как сумму очень большого числа независимых случайных величин k_i с любыми законами распределения, но входящими в k с примерно одинаковыми статистическими весами α_i ($k = \sum \alpha_i k_i$), то k оказывается распределенной нормально.

Плотность вероятности нормального закона f имеет вид

$$f(k - \bar{k})dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(k - \bar{k})^2}{2\sigma^2}\right] dk. \quad (9)$$

и приводится на рис. 4.

Закон (9) определяет вероятность отклонения случайной величины от среднего значения на величину $(k - \bar{k})$ в интервале dk . Параметр распределения σ^2 является дисперсией, и если равенство (9) получено при условии $\sqrt{\bar{k}} \gg 1$ из (2), то $\sigma^2 = \bar{k}$:

$$f(k)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left[-\frac{(k - \bar{k})^2}{2k}\right] dk. \quad (10)$$

Нормировка $f(k)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k)dk = 1$$

графически представляет собой площадь под кривой распределения.

Как и в случае дискретного распределения, среднее значение \bar{k} характеризует положение кривой на оси абсцисс:

$$\bar{k} = \int_{-\infty}^{\infty} k f(k) dk,$$

а дисперсия – форму кривой:

$$D_k = \int_{-\infty}^{\infty} (k - \bar{k})^2 f(k) dk.$$

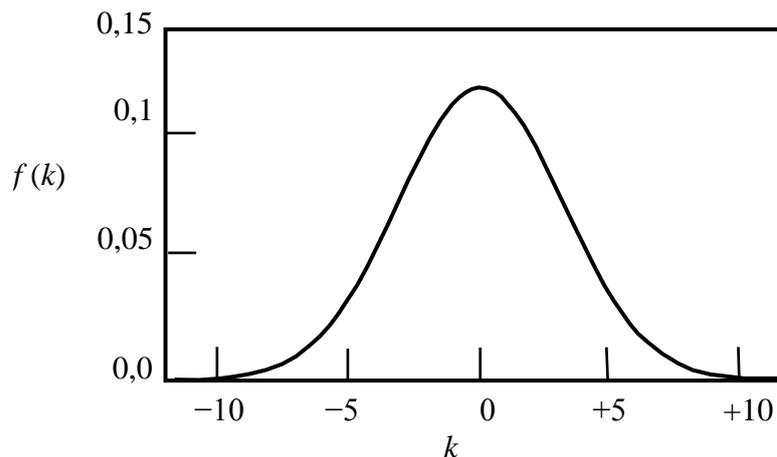


Рис. 4. Нормальное распределение для $\bar{k} = 0$ и $\sigma = 3,2$

В общем случае для нормального закона $D_k \neq \bar{k}$, но средняя квадратическая погрешность $\sigma_k = \sqrt{D_k}$ и относительная погрешность в измерении среднего значения нормальной случайной величины определяются стандартным образом:

$$\delta_k = \sqrt{D_k / \bar{k}}.$$

Из выражения (9) следует, что вероятность попадания случайной величины в интервал значений от k_1 до k_2 определится интегралом

$$f(k_1 \leq k \leq k_2)dk = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{k_2} \exp\left[-\frac{(k - \bar{k})^2}{2\sigma^2}\right] dk. \quad (11)$$

Для вычисления интеграла (11) в конечных пределах следует воспользоваться функциями Лапласа (или Гаусса):

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Используя выражение (10), легко убедиться, что нормальная случайная величина отклоняется от своего среднего значения по модулю не более чем на σ , 2σ и 3σ соответственно со следующими вероятностями:

$$f(|k - \bar{k}| \leq \sigma) = \Phi(1/\sqrt{2}) = 0,682; \quad (12)$$

$$f(|k - \bar{k}| \leq 2\sigma) = \Phi(\sqrt{2}) = 0,954; \quad (13)$$

$$f(|k - \bar{k}| \leq 3\sigma) = \Phi(3/\sqrt{2}) = 0,997. \quad (14)$$

В применении к задаче о временном распределении регистрируемых частиц неравенства (12)–(14) означают следующее: если выполняется условие $\sqrt{k} \gg 1$, то при регистрации частиц в большом числе равных временных интервалов показания счетчика в 68,2 % случаев будут отличаться от \bar{k} не более чем на $\pm \sigma$, в 95,4 % – не более чем на $\pm 2\sigma$ и в 99,7 % – не более чем на $\pm 3\sigma$. Соотношения (12)–(14) носят название «правила 3σ » и являются характерным свойством нормального закона.

Дополнительные признаки нормального распределения – нулевые асимметрия и эксцесс.

В общем случае асимметрия As любого распределения определяется через третий центральный момент и характеризует симметрию кривой распределения:

$$As = \int_{-\infty}^{+\infty} (k - \bar{k})^3 f(k) dk / \sigma^3. \quad (15)$$

Эксцесс Exc определяется через четвертый центральный момент и описывает крутизну кривой распределения:

$$Exc = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (k - \bar{k})^4 f(k) dk / \sigma^4 \right] - 3. \quad (16)$$

Если в выражениях (15) и (16) провести вычисления с $f(k)$ из (9), то получится $As = 0$ и $Exc = 0$.

В выражении (16) «-3» вводят, чтобы сделать Exc нормального распределения равным нулю: так удобнее проверять на «нормальность» другие распределения.

Приведем некоторые примеры из различных разделов физики, где используется нормальный закон. Во-первых, максвелловское распределение молекул по скоростям есть ничто иное, как трехмерный нормальный закон. Далее, пробеги частиц в веществе, разброс углов многократного рассеяния

частиц и, наконец, разброс по энергиям в пике полного поглощения – все это примеры нормального распределения.

Остановимся более детально на последнем примере. На рис. 5 приведено аппаратное распределение γ -квантов от источника Cs-137. По оси ординат отложены частоты попаданий частиц в данный канал, по оси абсцисс – номера каналов. Как известно, Cs-137 является источником монохроматических γ -квантов с $E_\gamma = 661$ кэВ. Однако из-за сложности взаимодействия γ -излучения с веществом сцинтиллятора аппаратный амплитудный спектр имеет непрерывное распределение с пиком полного поглощения (фотопик) в правой части.

Помимо среднего канала \bar{k} и корня из дисперсии σ , характеризующих пик, экспериментаторы часто пользуются понятием полуширины пика L на полувысоте. Высота пика h после нормировки будет соответствовать вероятности значения \bar{k} и, как следует из (9), $h = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Логарифмируя (9), при условии, что $L = k - \bar{k}$ для $h/2$, находим

$$L = \sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 1,18\sigma. \quad (17)$$

Заметим, что полуширина L используется при нахождении разрешающей способности спектрометра.

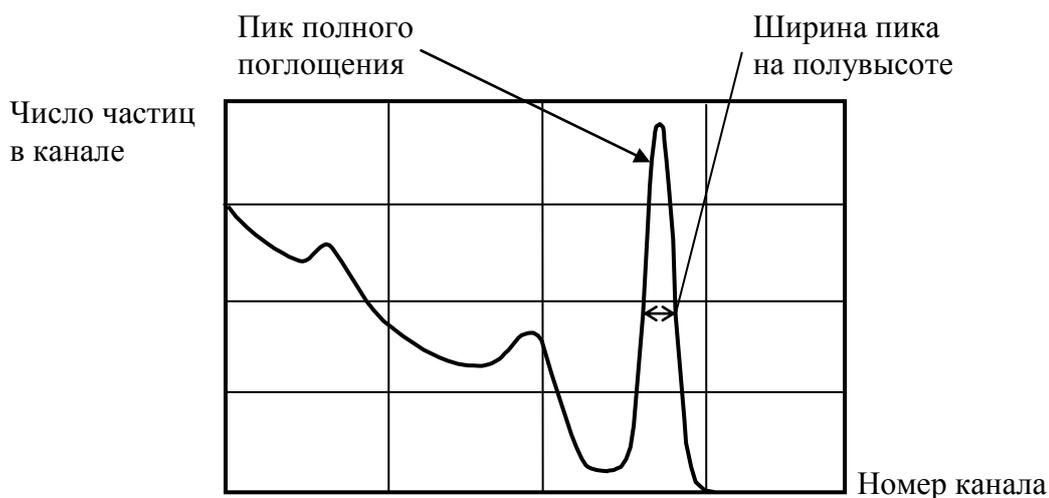


Рис. 5. Аппаратурный спектр радиоактивного изотопа Cs-137

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Компьютерное изучение биномиального распределения

Напомним, что в биномиальном законе число радиоактивных ядер должно быть ограниченным. Поскольку все стандартные р/а источники содержат огромное число р/а ядер в данном задании ограничимся компьютерным изучением биномиального закона. Для этого воспользуемся встроенными в систему Mathcad функциями $\text{dbinom}(k, n, p)$. Здесь k – число распадов, n – число радиоактивных ядер в образце, p – вероятность распада отдельного

ядра ($k < n, p < 1$). k и p относятся к одному и тому же интервалу времени. При помощи функции $\text{dbinom}(k, n, p)$ вычисляется вероятность распада k ядер при заданных значениях n и p . Эквивалентом функции $\text{dbinom}(k, n, p)$ является биномиальное распределение (1).

З а д а н и е 1. Построить на одном графике биномиальные распределения, используя функцию $\text{dbinom}(k, n, p)$ для $n = \text{const}$ и разных p . Для правильного выбора масштаба рекомендуется оценивать среднее значение $\bar{k} = np$. Распределения рекомендуется строить, используя тип кривых – stem.

Примеры:

$$\text{а) } n = 10, \quad p = 0,25; \quad \text{б) } n = 10, \quad p = 0,81.$$

З а д а н и е 2. Построить на одном графике функции $\text{dbinom}(k, n, p)$ для $p = \text{const}$, но разных n . $\bar{k} = np$.

Примеры:

$$\text{а) } n = 10, \quad p = 0,25; \quad \text{б) } n = 100, \quad p = 0,25.$$

З а д а н и е 3. Вычислить вероятность того, что из 100 ядер за время наблюдения распадется ровно 50, если вероятность распада одного ядра за это же время равна 0,5.

З а д а н и е 4. Найти из Задания 3 вероятность того, что число распавшихся ядер попадет, например, в интервал от 25 до 75. Интервал можно выбирать произвольно.

З а д а н и е 5. Построить графически биномиальное распределение, например, на участке $40 \leq k \leq 60$, используя данные из Задания 3. Интервал можно выбирать произвольно.

Изучение распределения Пуассона

Порядок проведения эксперимента

Внимание! Перед началом работы убедиться в заземлении блока сцинтилляционного детектора.

1. Включить установку в следующей последовательности: компьютер, спектрометр, программа «Спектр».

2. Подобрать режим работы, меняя ДНУ, напряжение питания ФЭУ или коэффициент усиления таким образом, чтобы за выбранный для измерений интервал времени регистрировалось в общем-то небольшое число частиц (не более 10) естественного радиоактивного фона и собственных шумов ФЭУ. Желательно, чтобы наблюдались и нулевые отсчеты.

Для измерений можно также использовать спектры любого радиоактивного источника, фиксируя с помощью ДНУ участки, где уже мало отсчетов – на правых хвостах спектров.

3. В окне спектрометра на панели «Лаб. работа» выбрать режим «циклы измерений». Установить время $t = 1$ с, число циклов (число измерений) $n = 300$, и нажать кнопку «Старт». При этом в окне спектрометра начнет расти частоток из ординат, соответствующих числу отсчетов в циклах. Следуя указаниям п.2, подобрать нужный режим работы.

4. По окончании измерений нажать кнопку «Сохранить». Результаты измерений запишутся на диске D. Путь, по которому можно найти записанные данные, следующий:

Диск D → папка «3 курс» → папка «Данные» → папка «Студенты» → папка с фамилией студента → номер лабораторной работы → номер задания → номер спектра.

Обработка результатов эксперимента

Обработка результатов эксперимента проводится в программе MathCad.

В результате проведенного эксперимента будет сформирован одномерный векторный массив V_1 , содержащий 1024 элемента, из которых только 300 являются рабочими, а остальные элементы – нули.

Чтобы из V_1 получить массив V , содержащий только значимые результаты эксперимента, нужно сделать следующие переобозначения: $n := 1..300$; $V_n := V_{1_n}$. Ввести также $N := 300$.

Напомним, что в систему Mathcad входят важнейшие статистические функции и распределения, позволяющие максимально упростить и ускорить обработку результатов измерений. Так, можно воспользоваться группой функций, вычисляющих основные статистические параметры элементов полученного массива V :

$\text{mean}(V)$ – вычисляет среднее значение k ;

$\text{var}(V)$ – вычисляет дисперсию D_k .

Обратите внимание на близость значений \bar{k} и D_k . Это уже дает право (см. (6)) выдвинуть гипотезу о том, что отсчеты распределены во времени по закону Пуассона. Назовем эту гипотезу нулевой.

Затем перейдем к расчету экспериментальных вероятностей P_k . Для этого надо знать экспериментальные частоты F_k т. е. число нулей, единиц и так далее в массиве V .

Функция-вектор $\text{hist}(\text{int}, V)$ как раз и подсчитывает количество одинаковых чисел в V и строит диаграмму частот F для всех k .

Подчеркнем, что в функции $\text{hist}(\text{int}, V)$ int также является вектором, так как представляет совокупность всех интервалов – точек, на которые разбивается массив V . Поскольку «границы» int точно совпадают с возможными значениями k , диаграмма строится следующим образом.

С помощью функций-операторов $\text{min}(V)$ и $\text{max}(V)$ следует выбрать из массива минимальное и максимальное значения k . Далее надо сделать

следующие присвоения: $k := \min(V)..max(V)$; $i := \min(V)..max(V) + 1$, $int_i := i$ и $F := hist(int, V)$.

Для графического вывода диаграммы частот F в шаблоне графика по оси ординат следует отложить F_k , по оси абсцисс – k . Можно также вывести значения частот F_k в виде столбца данных, выполнив операцию $F_k = .$ Убедиться, что сумма всех F_k равна числу циклов N .

Задание 1. В соответствии с вышеприведенной методикой построить диаграмму экспериментальных частот F_k для всех k . Тип кривой – bar.

Задание 2. Построить графически экспериментальное распределение вероятностей PE_k для всех k : $PE_k := F_k / \sum_k F_k$. Тип кривой – stem. Вывести PE_k также в виде столбца данных.

Задание 3. Найти \bar{k} и D_k , используя экспериментальные вероятности PE_k :

$$\bar{k} = \sum_k k \cdot PE_k,$$
$$D_k = \sum_k (k - \bar{k})^2 \cdot PE_k.$$

Для обозначения среднего и дисперсии использовать любую букву, например a , b и другие, так как черта над буквой в Mathcad обозначает комплексно сопряженную величину, а индексы могут быть только у векторных величин.

Сравнить найденные значения \bar{k} и D_k с полученными при помощи операторов $mean(V)$ и $var(V)$.

Оценить относительную погрешность в определении \bar{k} по всей совокупности экспериментальных данных:

$$\delta_{\bar{k}} = 1 / \sqrt{\bar{k} \cdot N}.$$

Задание 4. С найденным в задании 3 \bar{k} построить теоретические вероятности PT_k , предполагая справедливость закона Пуассона. Для этого надо воспользоваться функцией $drois(k, \lambda)$ и положить $\lambda \equiv \bar{k}$. Сделав присвоение $PT_k := drois(k, \bar{k})$, можно получить теоретическое распределение вероятностей с экспериментальным \bar{k} . Построить это распределение на том же графике (см. задание 2), где приводятся экспериментальные вероятности PE_k . Тип линии – bar. Можно также вывести вероятности PE_k и PT_k в виде столбцов данных. Обратит внимание на тот факт, что, как и должно быть, PE_k и PT_k различаются.

Задание 5. Оценить степень достоверности нулевой гипотезы (закон Пуассона), основываясь на различии PE_k и PT_k .

Чтобы решить, является это различие существенным (значимым) или объясняется случайными причинами, следует воспользоваться статистическими критериями проверки гипотез. Ниже рассматриваемый критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) отвечает на вопрос, противоречит ли эксперимент принятой нулевой гипотезе.

Для применения критерия χ^2 надо из PE_k и PT_k построить случайную величину χ^2 по следующему правилу:

$$\chi^2 = N \sum_k \frac{(PE_k - PT_k)^2}{PT_k},$$

где N – число циклов измерений.

Очевидно, что чем меньше различие между PE_k и PT_k , тем более правдоподобной будет нулевая гипотеза и тем меньшей величиной будет χ^2 .

Полученную величину χ^2 следует сравнить с критическим значением $\chi_{кр}^2$, которое для разных степеней свободы d и разного уровня значимости $\alpha = 1 - p$ задается функцией $qchisq(p, d)$. Число степеней свободы d для распределения Пуассона определяется как число разных значений k минус 2.

Уровень значимости α есть вероятность отвергнуть правильную гипотезу. Поэтому для α выбирается обычно малая величина, например 0,05. В этом случае в функции $qchisq(p, d)$ следует взять для p значение 0,95.

Если экспериментальное χ^2 окажется меньшим критического, проверяемую гипотезу можно считать правдоподобной. Для принятого уровня значимости только в 5 случаях из 100 при справедливости нулевой гипотезы можно получить неравенство $\chi^2 > \chi_{кр}^2$.

Компьютерное и экспериментальное изучение нормального распределения

Задание 1. Используя функцию $F(x) = dnorm(x, a, \sigma)$, которая является эквивалентом нормального распределения (9), представить на одном графике несколько нормальных кривых для разных a и σ , где a – среднее значение.

Задание 2. Последовательно проверить графически «правило 3σ », т. е. на нормальной кривой выделить участки, опирающиеся на интервалы $a \pm \sigma$, $a \pm 2\sigma$, $a \pm 3\sigma$ (см. формулу (11)). Найти соответствующие площади.

Задание 3. Найти методом трассировки отношение полуширины нормальной кривой L на полувысоте к σ . Сравнить с выражением (17).

Задание 4. Обработать экспериментальный фотопик Cs-137 в следующей последовательности.

Визуально оценить правую и левую границы пика, т. е. выбрать минимальный и максимальный каналы спектрометра, на которые опирается кривая фотопика. Далее, используя экспериментальные частоты и заменяя интегрирование суммированием, найти соответствующие вероятности PE_k , затем средний канал a , равный \bar{k} , дисперсию σ^2 , асимметрию, эксцесс, отношение L к σ . Последнее сравнить с выражением (17).

Проверить по экспериментальной кривой «правило 3σ ». С найденными экспериментальными a и σ построить нормальную кривую $f(x) = \text{dnorm}(x, a, \sigma)$.

Построить на одном графике экспериментальные вероятности PE_k и теоретическую кривую $f(x)$. Для этого по оси абсцисс задать k и x через запятую. Сделать вывод о возможности аппроксимации экспериментального спектра в области фотопика нормальным распределением.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите биномиальный закон распределения и объясните его смысл.
2. Объясните содержание закона Пуассона и перечислите условия его возникновения.
3. Какая связь между биномиальным законом и законом Пуассона?
4. Что характеризует дисперсия случайной величины?
5. Как связаны среднее значение и дисперсия для случайных величин, распределенных по закону Пуассона?
6. Объясните смысл нормального закона и запишите его плотность вероятности.