

**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ»
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

На правах рукописи

УДК 535.32, 535.42, 537.87, 539.1.03

ГУРНЕВИЧ
Евгений Александрович

**ГЕНЕРАЦИЯ ФОТОНОВ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ
ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ В КРИСТАЛЛАХ,
ОБРАЗОВАННЫХ АНИЗОТРОПНО РАССЕЙВАЮЩИМИ
ЦЕНТРАМИ**

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.04.16 — физика атомного ядра
и элементарных частиц

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Барышевский В.Г.

Минск 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ	6
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ	8
ГЛАВА 1 СПОНТАННОЕ И ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗА- РЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ КРИСТАЛЛЫ	13
1.1 Описание процесса излучения фотонов заряженной частицей . . .	13
1.2 Дифракция и преломление в кристаллах	14
1.3 Переходное и черенковское излучение	18
1.4 Параметрическое рентгеновское излучение	21
1.5 Дифракция и излучение в кристаллах, образованных анизотроп- но рассеивающими центрами	23
1.6 Индуцированное излучение заряженных частиц в кристалле . . .	27
1.7 Выводы к главе 1	28
ГЛАВА 2 ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В ТРЕХМЕР- НЫХ КРИСТАЛЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ АНИЗОТРОПНО РАС- СЕЙВАЮЩИМИ ЦЕНТРАМИ	30
2.1 Рассеяние на одиночном центре	30
2.1.1 Метод парциальных волн	30
2.1.2 Матрица рассеяния	32
2.2 Распространение волн в кристалле	34
2.3 Выводы к главе 2	43
ГЛАВА 3 ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В ДВУМЕРНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ АНИЗОТРОП- НО РАССЕЙВАЮЩИМИ ЦЕНТРАМИ	44
3.1 Рассеяние электромагнитной волны на нити	44
3.1.1 Рассеяние плоской волны на нити	45
3.1.2 Рассеяние цилиндрической волны на нити	50
3.2 Рассеяние электромагнитной волны на одномерной решетке	52
3.3 Дифракция и преломление в кристалле	58
3.4 Выводы к главе 3	63

ГЛАВА 4 ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ НИТЯМИ	64
4.1 Черенковское излучение при $kR \ll 1$	64
4.1.1 Показатель преломления кристалла для волны с ТЕ-поляризацией	65
4.1.2 Показатель преломления кристалла для волны с ТМ-поляризацией	69
4.1.3 Интенсивность черенковского излучения	70
4.2 Излучение в кристалле из металлических нитей при больших kR	74
4.2.1 Выражения для спектрально-углового распределения	74
4.2.2 Излучение в одномерной решетке из нитей и в структуре, состоящей из небольшого числа кристаллических плоскостей	79
4.2.3 Черенковское и переходное излучение	84
4.2.4 Параметрическое излучение	87
4.2.5 Излучение электронного сгустка	90
4.2.6 Оптический диапазон	94
4.3 Выводы к главе 4	99
ГЛАВА 5 РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ОДНОМЕРНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ	100
5.1 Исследования индуцированного излучения в фотонных кристаллах в Институте ядерных проблем БГУ	100
5.2 Взаимодействие электронного пучка с волной в периодическом волноводе	102
5.3 Свободные электромагнитные колебания	106
5.4 Инкремент неустойчивости электронного пучка	110
5.5 Численные решения	112
5.6 Выводы к главе 5	118
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	119
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	122
Список использованных источников	122
Список публикаций соискателя	132
ПРИЛОЖЕНИЕ А	136
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	140

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ЛСЭ – лазер на свободных электронах
- ПРИ – параметрическое рентгеновское излучение
- c – скорость света в вакууме
- e – электрический заряд электрона
- Q – целое число
- \mathbf{E} – электрическое поле
- \mathbf{k} – волновой вектор в вакууме
- k – волновое число в вакууме (модуль волнового вектора)
- \mathbf{q} – волновой вектор в кристалле
- ω – циклическая частота фотона
- \hbar – постоянная Планка
- $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^s(\mathbf{r}, \omega)$ – решение однородных уравнений Максвелла, описывающее рассеяние на мишени плоской электромагнитной волны единичной амплитуды с волновым вектором \mathbf{k} и единичным вектором поляризации \mathbf{e}^s , $s = 1, 2$
- $f(\theta)$ – амплитуда рассеяния на угол θ
- Ω_3 – объем элементарной ячейки трехмерного кристалла
- Ω_2 – площадь элементарной ячейки двумерного кристалла
- $g_{\boldsymbol{\tau}} \equiv g(\boldsymbol{\tau})$ – эффективная поляризуемость кристалла, соответствующая вектору обратной решётки $\boldsymbol{\tau}$
- α – постоянная тонкой структуры
- γ – лоренц-фактор частицы
- L – толщина кристаллической пластинки
- λ – длина волны излучения
- \mathbf{S} – матрица рассеяния
- \mathbf{T} – унитарная матрица рассеяния (соответствующая T -оператору)
- \mathbf{K} – матрица реакций
- h_l – сферические функции Ганкеля 1-го рода порядка l
- P_l – полиномы Лежандра
- R – радиус нити
- H_n – цилиндрическая функция Ганкеля 1-го рода порядка n
- $\boldsymbol{\rho}$ – проекция радиус-вектора \mathbf{r} на плоскость, перпендикулярную оси нити (как правило, оси x)

- \mathbf{k}_ρ – проекция волнового вектора на плоскость, перпендикулярную оси нити
- $C \approx 0.5772$ – постоянная Эйлера
- ε – диэлектрическая проницаемость среды
- σ – проводимость среды
- ω_l – ленгмюровская частота

ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные процессы, возбуждаемые в кристаллах частицами высоких энергий, являются предметом интенсивных исследований уже не один десяток лет [1–8]. Несмотря на это, интерес к данным явлениям не снижается. Во многих, ведущих в области ядерной физики, лабораториях мира создаются мощные ускорительные комплексы, предназначенные для исследований электромагнитного излучения, возникающего при взаимодействии релятивистских пучков заряженных частиц с различными мишенями, в том числе с кристаллами и искусственными пространственно-периодическими структурами. Это, например, ускоритель ЛИНАК-800 в России [9], JLab ERL в США [10], КЕК сERL в Японии [11, 12] и многие другие [13, 14]. Планируется создание на основе этих комплексов источников излучения в широком спектральном диапазоне, от микроволнового и терагерцового до оптического и рентгеновского. Генерируемое излучение может использоваться как в исключительно исследовательских целях, так и для нужд народного хозяйства: в медицине, в системах безопасности, для контроля качества продукции и так далее [14, 15]. Таким образом, исследование процессов генерации фотонов релятивистскими заряженными частицами в пространственно-периодических средах продолжает оставаться чрезвычайно актуальным.

В настоящее время известно несколько типов излучения, образуемого частицей, движущейся в кристалле с постоянной скоростью: резонансное или дифракционное излучение [16–19], эффект Вавилова-Черенкова [20, 21], параметрическое рентгеновское излучение [2, 8], переходное излучение [22]. Всех их объединяет единый микроскопический механизм: под влиянием электромагнитного поля движущейся частицы поляризуются и начинают излучать атомы (ядра) среды. Черенковское и переходное излучение были открыты ещё в 30–40 гг. прошлого века и широко используются сейчас на практике: в детекторах элементарных частиц, генераторах и усилителях излучения и т.д. [22–24]. Дифракционное и параметрическое излучение интенсивно исследуются теоретически и экспериментально в настоящее время [2, 25–35]. Стимулом к таким работам также служат многочисленные возможности практического применения, в частности, возможность создания компактных переформируемых источников монохроматического рентгеновского излучения [2], а также диагностики пучков релятивистских заряженных частиц [36, 37].

Большое внимание в последнее время в научной литературе уделяется разработке метаматериалов, — искусственных сред с необычными свойствами (имеющих, например, отрицательный показатель преломления) [43–46]. Проводятся обширные исследования по разработке и созданию искусственных

пространственно-периодических сред (фотонных кристаллов) [38–42]. Среди прочих активно исследуются электромагнитные кристаллы, построенные из параллельных металлических проволочек, в том числе при размерах проволочек, лежащих в нанометровом диапазоне [45, 47]. В ряде исследований была затронута и тема излучения заряженных частиц в таких структурах. Появились работы, посвященные динамической дифракции в фотонных кристаллах [48–51], черенковскому излучению в метаматериалах в условиях, когда длина волны излучения велика по сравнению с периодом структуры [52–59], и т.д. В работах белорусской группы исследователей [60–63] рассматривалось параметрическое излучение в двумерных фотонных кристаллах, образованных металлическими нитями. Проведенный анализ выявил ряд проблем и особенностей, возникающих при описании излучения и дифракции в таких искусственных кристаллах.

Теоретическое описание процессов излучения рентгеновских квантов в кристаллах основано на динамической теории дифракции Лауэ-Эвальда. Исходным пунктом для исследования дифракции в кристаллах обычно является решение задачи рассеяния волны на отдельном составляющем кристалл центре (атоме или ядре) [64, 65]. В литературе наиболее полно рассмотрены случаи, когда рассеяние на отдельных центрах можно считать либо изотропным (например, при дифракции тепловых нейтронов на ядрах), либо имеющим анизотропию, характерную для дипольного излучения (при рассеянии рентгеновских лучей на атомах). Между тем рассеяние электромагнитных волн на макроскопических элементах, из которых состоят в большинстве случаев фотонные кристаллы, далеко не всегда может быть описано аналогичным образом; чаще всего зависимость амплитуды рассеяния от угла имеет более сложный вид, чем в случае рассеяния рентгеновских лучей на атомах. Поэтому многие результаты, полученные в теории дифракции и излучения, генерируемого частицами в естественных кристаллах, оказывается невозможным непосредственно применить к искусственным периодическим средам. Как следствие, возникает необходимость в проведении более детального анализа дифракции и излучения в кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами. Данная диссертационная работа и посвящена такому анализу.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Исследования, результаты которых вошли в диссертацию, проводились в Научно-исследовательском учреждении “Институт ядерных проблем” Белорусского Государственного Университета в рамках следующих программ:

- ГПФИ “Поля и частицы”, № гос. рег. 20062608, 2006–2010 гг.
- ГПОФИ “Высокоэнергетические, ядерные и радиационные технологии”, задание 3.31, № гос. рег. 20066745, 2006–2010 гг.
- ГПНИ “Конвергенция”, подпрограмма “Физика фундаментальных взаимодействий и плазма”, задание 2.3.02, № гос. рег. 20111382, 2011–2013 гг.
- ГПНИ “Конвергенция”, подпрограмма “Физика фундаментальных взаимодействий и плазма”, задание 2.3.05, № гос. рег. 20140532, 2014–2015 гг.
- ГПНИ “Конвергенция 2020”, подпрограмма “Микромир, плазма, Вселенная”, задание 2.3.03, № гос. рег. 20162275, 2016–2020 гг.

Тема диссертации соответствует приоритетным направлениям фундаментальных и прикладных научных исследований, в частности, пункту 12.2. “Физика фундаментальных взаимодействий, высоких энергий и экстремальных состояний вещества, плазма и ее применение, плазменно-пучковые технологии” перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утвержденного постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 19.04.2010 № 585, а также пункту 12 (“Междисциплинарные исследования”) перечня приоритетных направлений научных исследований Республики Беларусь на 2016 – 2020 годы, утвержденного постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 12.03.2015 № 190. Диссертация соответствует пункту 8 “Прохождение частиц и ядер через вещество. Ядерная оптика” паспорта специальности 01.04.16 – физика атомного ядра и элементарных частиц.

Цель и задачи исследования

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является теоретическое описание процессов излучения фотонов релятивистскими заряженными частицами в кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие **основные задачи**:

1. Разработать теоретическое описание процессов преломления и дифракции волн в трехмерных и двумерных кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами.
2. Применить разработанную теорию для исследования преломления и дифракции электромагнитных волн в фотонном кристалле, образованном параллельными металлическими нитями, и рассмотреть влияние анизотропии рассеяния на отдельной нити на процесс спонтанного излучения фотонов при движении релятивистских заряженных частиц через такие кристаллы, для случая, когда длина волны излучения λ много больше радиуса нитей R ($kR \ll 1$, где $k = 2\pi/\lambda$).
3. Получить выражения для спектрально-углового распределения излучения, справедливые в случае, когда длина волны сравнима с радиусом нити ($0 < kR \lesssim 1$). Исследовать с их помощью спонтанное параметрическое, черенковское и переходное излучение в кристаллах, образованных металлическими нитями, при различных kR .
4. Провести анализ радиационной неустойчивости релятивистского электронного пучка и возникающего при этом индуцированного излучения в кристалле из металлических нитей, размещенном внутри волновода круглого сечения.

Объектом исследования являются естественные и искусственные кристаллы, образованные анизотропно рассеивающими центрами.

Предметом исследования выступают процессы преломления и дифракции в кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами, а также свойства спонтанного и индуцированного излучения, возникающего при движении релятивистских заряженных частиц в двумерных фотонных кристаллах (в частности, образованных металлическими нитями).

Научная новизна

Все основные результаты, представленные в диссертации, получены впервые. Научная новизна диссертации состоит в разработке теоретического описания процессов преломления и дифракции волн, а также процессов излучения фотонов релятивистскими заряженными частицами в кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами. Установлено, что при описании распространения волн в кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами, так же как и для изотропного случая, вместо элементов матрицы рассеяния \mathbf{T} необходимо использовать элементы матрицы реакций \mathbf{K} ; получены явные выражения для эффективных поляризуемостей и показателя преломления таких кристаллов; получены формулы, позволяющие

определить интенсивность излучения фотонов релятивистскими заряженными частицами, движущимися через двумерные кристаллы, образованные анизотропно рассеивающими центрами; показана возможность черенковского излучения в кристалле, образованном параллельными металлическими нитями; рассчитана интенсивность излучения в терагерцовом и оптическом диапазонах при типичных параметрах современных ускорителей. Представленные результаты актуальны в связи с активными исследованиями в области создания мощных источников излучения в различных частотных диапазонах, проводимыми в ведущих лабораториях мира.

Выносимые на защиту положения

1. Показатель преломления и эффективные поляризуемости кристаллов, образованных анизотропно рассеивающими центрами, так же как в изотропном случае, определяются элементами матрицы реакций **K**, а не матрицы рассеяния **T**, как это имеет место для хаотической среды.
2. В фотонном кристалле, образованном параллельными металлическими нитями, возможно черенковское излучение, поскольку действительная часть показателя преломления такого кристалла для ТЕ-поляризованной волны превышает единицу, а поглощение в кристалле существенно подавлено по сравнению со случаем среды, образованной хаотически расположенными нитями.
3. Вклады ТЕ- и ТМ-поляризованной компонент в интенсивность спонтанного излучения релятивистских заряженных частиц в фотонном кристалле, образованном металлическими нитями, при $kR \sim 1$, где R – радиус нити, k – волновое число, являются сравнимыми, в отличие от случая $kR \ll 1$, когда одна компонента является доминирующей.
4. Увеличение тока электронного пучка, проходящего через расположенный внутри круглого волновода фотонный кристалл, приводит к тому, что положение максимума инкремента радиационной неустойчивости смещается от точки вырождения корней дисперсионного уравнения вниз по частоте.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа отражает личный вклад автора в проведенные исследования. Все основные результаты, представленные в работе, получены автором самостоятельно. Научным руководителем, доктором физ.-мат. наук, профессором В.Г. Барышевским была определена область исследований,

осуществлялось общее руководство, оказывалась методологическая помощь, проводились обсуждение и интерпретация полученных результатов.

В работе [2–А] А.А. Гуринович и А.С. Лобко участвовали в обсуждении и интерпретации полученных автором результатов.

Основные идеи экспериментальных работ [6–А, 8–А, 9–А] были сформулированы В.Г. Барышевским и А.А. Гуринович, остальные соавторы участвовали в подготовке и проведении экспериментов. Автором диссертации был проведен численный расчет и анализ свойств фотонных кристаллов для данных работ; автор также непосредственно участвовал в проведении экспериментов, обработке и анализе их результатов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты были представлены на следующих международных конференциях:

1. “Days on Diffraction’09”, Санкт-Петербург, Россия, 26–29 мая 2009.
2. “Seventh International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves” (MSMW’10), Харьков, Украина, 21–26 июня 2010.
3. “Современные проблемы физики-2010”, Минск, Беларусь, 9–11 июня 2010.
4. “XVIII International Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems” (NPCS’11), Минск, Беларусь, 17–20 мая 2011.
5. “Fundamental and Applied NanoElectroMagnetics” (FANEM’12), Минск, Беларусь, 22–25 мая 2012.
6. “Современные проблемы физики-2014”, Минск, Беларусь, 11–13 июня 2014.
7. “XXII International Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems” (NPCS’15), Минск, Беларусь, 19–22 мая 2015.
8. “Fundamental and Applied NanoElectroMagnetics” (FANEM’15), Минск, Беларусь, 25–27 мая 2015.
9. “XXIII International Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems” (NPCS’16), Минск, Беларусь, 24–27 мая 2016.
10. “7th International Conference Charged & Neutral Particles Channeling Phenomena” (Channeling 2016), Сирмионе-Дезенцано дель Гарда, Италия, 25–30 сентября 2016.
11. “XXIV International Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems” (NPCS’17), Минск, Беларусь, 16–19 мая 2017.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 научных работах, из которых 5 — статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь (общим объемом 3.1 авторских листа), 8 — статьи в сборниках материалов конференций, 5 — тезисы докладов конференций, 4 — препринты.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав, заключения, библиографического списка и приложений. Полный объём диссертации составляет 144 страницы; работа содержит 47 рисунков на 43 страницах и 2 таблицы на 2 страницах. Библиографический список состоит из 168 наименований, включая собственные публикации автора.

ГЛАВА 1

СПОНТАННОЕ И ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ КРИСТАЛЛЫ

1.1 Описание процесса излучения фотонов заряженной частицей

Пусть релятивистская частица с зарядом eQ , где $|e|$ — заряд электрона, пролетает через некоторую мишень (например, кристаллическую пластинку). Для исследования процессов излучения электромагнитных волн такой частицей можно воспользоваться общим методом, изложенным в [2, 3, 66]. Спектральная плотность энергии излучения на единицу телесного угла $W_{\mathbf{n}\omega}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$), дифференциальное число квантов $\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} \equiv dN_{\mathbf{n}\omega} = W_{\mathbf{n}\omega}/\hbar\omega$, а также поляризационные характеристики излучения могут быть получены, если известно поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, порождаемое заряженной частицей на больших расстояниях \mathbf{r} от кристалла (мишени):

$$W_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c r^2}{4\pi^2} \overline{|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2}, \quad (1.1)$$

где c — скорость света. Черта здесь означает усреднение по всем возможным состояниям изучаемой системы.

Для нахождения неизвестного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, как правило, решаются неоднородные уравнения Максвелла, описывающие поле в среде при движении через неё заряженной частицы. Однако, как это показано в [2, 3, 66], задачу можно существенно упростить, ограничившись только решением *однородных* уравнений Максвелла. Пусть $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^s(\mathbf{r}, \omega)$ есть решение таких уравнений, описывающее процесс рассеяния плоской волны с волновым вектором \mathbf{k} на мишени; индекс s здесь нумерует два независимых состояния поляризации. Тогда, если $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ — скорость частицы и её траектория, справедлива следующая формула

$$dN_{\mathbf{n},\omega}^s = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} \left| \int \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^s(\mathbf{r}(t), \omega) \mathbf{v}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (1.2)$$

Интегрирование в (1.2) проводится по всей области движения частицы.

1.2 Дифракция и преломление в кристаллах

Таким образом, для исследования излучения заряженных частиц в кристалле необходимо решить задачу рассеяния (преломления, дифракции) электромагнитной волны на кристаллической пластинке. Поскольку любой кристалл является пространственно-периодической средой, образованной из одинаковых повторяющихся элементов (например, атомов в случае естественных кристаллов или различных макроскопических тел — шариков, проволочек и т.п. в случае искусственных фотонных кристаллов), рассмотрим вначале рассеяние волны на отдельном таком элементе (рассеивающем центре).

Пусть плоская волна $\Psi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ рассеивается на центре, расположенном в начале координат (рисунок 1.1). В соответствии с теорией рассеяния [68] результирующее волновое поле на больших расстояниях от центра $kr \gg 1$ представляет собой сумму исходной плоской волны и расходящейся от центра сферической волны

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + \Psi_{sc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.3)$$

где $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — амплитуда рассеяния, $\mathbf{k}' = k \frac{\mathbf{r}}{r}$.

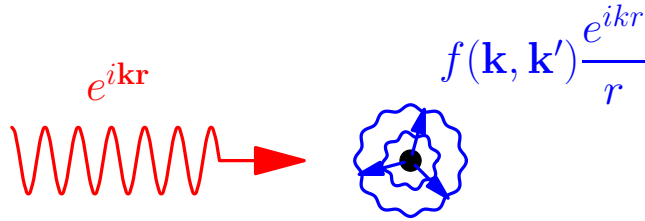


Рисунок 1.1. – Рассеяние волны на одиночном центре

Выражение (1.3) справедливо для волн любой природы, и Ψ может быть, например, скалярной волновой функцией, описываемой уравнением Шредингера, векторной электромагнитной волной и т.д. Амплитуда рассеяния является, вообще говоря, комплексной величиной, и у неё всегда есть хотя бы небольшая мнимая часть, независимо от того, является ли рассеяние на отдельном центре упругим или неупругим [69]. В соответствии с оптической теоремой мнимая часть амплитуды рассеяния вперед (т.е. на угол 0, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$) связана с полным сечением рассеяния на центре σ [68, 69]:

$$\text{Im } f(0) = \frac{k\sigma}{4\pi}. \quad (1.4)$$

Перейдем теперь к задаче рассеяния волн средой (мишенью), образованной множеством одинаковых рассеивающих центров. Известно, что показа-

тель преломления может быть выражен через амплитуду рассеяния на отдельном центре. Если рассеиватели в среде расположены хаотически, то [70]

$$n = 1 + \frac{2\pi\rho}{k^2} f(0), \quad (1.5)$$

где ρ – плотность рассеивателей (число рассеивателей в единице объема).

Обратим внимание, что показатель преломления, вычисленный по (1.5), даже в случае упругого рассеяния на отдельных центрах имеет мнимую часть, которая описывает ослабление волны в среде. Физическим источником такого ослабления является некогерентное рассеяние в среде на большие углы (волны, рассеянные на большие углы, имеют случайные фазы) [70].

В интересующем нас случае, когда рассеиватели в среде расположены периодически (среда представляет собой кристалл), для корректного описания процесса преломления необходимо использовать другое выражение для n . Как показано в работах [65, 71, 72], учет многократного когерентного перерассеяния волн на составляющих кристалл центрах приводит к следующему результату

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi}{k^2\Omega_3} \frac{f}{1 + ikf}, \quad (1.6)$$

где Ω_3 – объем элементарной ячейки кристалла (в кристалле $\Omega_3 = \frac{1}{\rho}$).

С помощью оптической теоремы можно показать, что (1.6) отличается от (1.5) величиной мнимой части n [65]. В частности, если рассеяние на отдельных центрах является упругим, формула (1.6), в отличие от (1.5), приводит к физически правильному результату: мнимая часть показателя преломления такого кристалла оказывается тождественно равной нулю (формула (1.7)).

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi}{k^2\Omega_3} \frac{\operatorname{Re} f}{1 - k^2|f|^2}. \quad (1.7)$$

Выражение (1.6) получено в предположении, что рассеяние на одиночном центре является изотропным, т.е. амплитуда f не зависит от угла рассеяния, как это имеет место, например, при рассеянии тепловых и холодных нейтронов на атомных ядрах (поскольку в этом случае длина волны много больше размеров рассеивателя). На практике, однако, такое предположение далеко не всегда является оправданным. В частности, в настоящее время интенсивно исследуются различные искусственные пространственно-периодические структуры, состоящие из элементов, рассеяние на которых анизотропно (следуя сложившейся практике, будем называть такие структуры фотонными кристаллами, хотя в литературе используются и другие определения этого термина [39–42]). Обратим внимание, что при рассмотрении

векторных (электромагнитных) волн амплитуда рассеяния может зависеть от угла даже в том случае, когда длина волны много больше размеров рассеивателя [73, 74]. Таким образом, большой интерес представляет обобщение результата (1.6) на случай произвольной зависимости $f(\theta)$.

Если для волнового вектора в кристалле выполняются условия дифракции Вульфа-Брэгга, то поле внутри кристалла в общем случае будет являться суммой прямой (преломленной) и нескольких дифрагированных волн. Напомним кратко, каким образом анализируется этот случай, например, для рентгеновских лучей [64].

Поскольку кристалл является трёхмерно-периодической средой, то, согласно теореме Блоха, поле внутри кристалла можно представить в виде

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{E}^s(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}) e^{i(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{r}}, \quad (1.8)$$

где для $\mathbf{E}^s(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau})$ справедлива система уравнений

$$\left(\frac{\mathbf{q}^2}{k^2} - 1 \right) \mathbf{E}^s(\mathbf{q}) - \sum_{\boldsymbol{\tau}} g_{\boldsymbol{\tau}}^s \mathbf{E}^s(\mathbf{q} - \boldsymbol{\tau}) = 0. \quad (1.9)$$

Здесь \mathbf{q} – волновой вектор в кристалле, $k = \frac{\omega}{c}$, $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решётки кристалла, $g_0^s = \varepsilon_0^s - 1$, $g_{\boldsymbol{\tau}}^s = \varepsilon_{\boldsymbol{\tau}}^s$, $\varepsilon_{\boldsymbol{\tau}}^s$ – фурье-компоненты диэлектрической проницаемости кристалла [20, 64], а индекс $s = 1, 2$ нумерует два возможных состояния поляризации. В наиболее простом случае двухволновой дифракции, когда в (1.9) можно пренебречь амплитудами всех волн, кроме $\mathbf{E}^s(\mathbf{q})$ и $\mathbf{E}^s(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau})$, эта система сводится к виду

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathbf{q}^2}{k^2} - 1 - g_0^s \right) \mathbf{E}^s(\mathbf{q}) - g_{-\boldsymbol{\tau}}^s \mathbf{E}^s(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}) = 0, \\ -g_{\boldsymbol{\tau}}^s \mathbf{E}^s(\mathbf{q}) + \left(\frac{(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau})^2}{k^2} - 1 - g_0^s \right) \mathbf{E}^s(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Согласно [60], аналогичная система уравнений справедлива и для описания дифракции в фотонных кристаллах. При этом, если рассеяние на отдельном центре является изотропным, то для трёхмерных кристаллов

$$g_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{4\pi}{k^2 \Omega_3} \frac{f}{1 + ikf}, \quad (1.11)$$

а для двумерных (т.е. двумерно-периодических)

$$g_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{4\pi}{k^2 \Omega_2} \frac{f}{1 + i\pi f}, \quad (1.12)$$

где f – амплитуда рассеяния волны на отдельном центре, Ω_2 – площадь элементарной ячейки двумерного кристалла. Формулы (1.11)-(1.12) означают, что при вычислении эффективных поляризуемостей g_{τ} из мнимой части амплитуды рассеяния должен быть исключён вклад в полное сечение, обусловленный упругим когерентным рассеянием [65].

Как уже отмечалось выше, при анализе дифракции в фотонных кристаллах большой интерес может представлять случай, когда рассеяние на отдельном центре является анизотропным. В этом случае формулы (1.11)-(1.12) становятся неприменимы, и для проведения такого анализа необходимо получить выражения для g_{τ} , справедливые при произвольной зависимости амплитуды $f(\theta)$ от угла рассеяния (см. далее раздел 1.5).

Предположим, что величины g_{τ} известны. Для того, чтобы система уравнений (1.9) (или (1.10)) была совместной, необходимо равенство нулю её определителя. Из этого условия находятся возможные значения вектора \mathbf{q} в кристалле и соответствующие собственные решения $\mathbf{E}(\mathbf{q})$, $\mathbf{E}(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau})$. Для решения задачи о дифракции исходной плоской волны на кристаллической пластинке поле в кристалле представляется в виде суперпозиции собственных решений (Блоховских волн), а неизвестные коэффициенты, как обычно, находятся с помощью граничных условий.

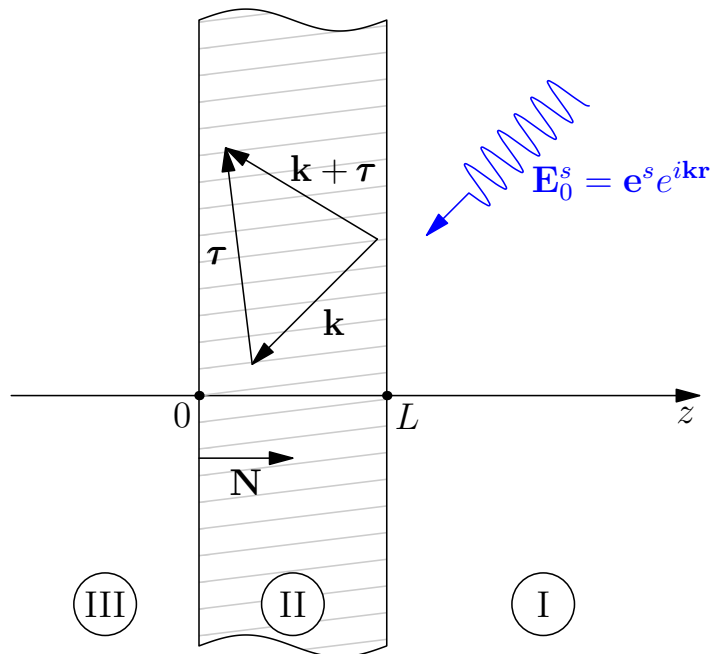


Рисунок 1.2. – Дифракция плоской волны на кристаллической пластинке в геометрии Лауэ

Приведем здесь для примера решение граничной задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на плоскопараллельной кристаллической пластинке (см., например, [2, 3, 75]). Пусть в кристалле выполняются условия

двухволновой дифракции для векторов \mathbf{k} , $\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$: $|\mathbf{k}| \approx |\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}|$. Будем считать, что ось z направлена по нормали к пластинке; сама пластинка занимает область пространства $0 \leq z \leq L$ (рисунок 1.2). Рассмотрим случай дифракции в геометрии Лауэ, когда прямая и дифрагированная волна покидают кристалл через одну и ту же поверхность: $k_z < 0$, $k_z + \tau_z < 0$. Будем также считать, что величины $g_{\boldsymbol{\tau}}$ малы $|g_0| \ll 1$, $|g_{\boldsymbol{\tau}}| \ll 1$, а исходная плоская волна $\mathbf{E}_0^s = \mathbf{e}^s e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ с вектором поляризации \mathbf{e}^s падает на пластинку со стороны положительных значений z (такой, несколько непривычный, выбор геометрии задачи упрощает последующую подстановку получающихся формул в выражение (1.2) для нахождения спектрально-углового распределения излучения, и соответствует изложению [2,3,75]). Тогда решение для поля \mathbf{E} внутри и снаружи пластинки (в областях I, II и III на рисунке 1.2) в соответствии с [2,3,75] можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(-)s} = & \left\{ \mathbf{e}^s \left[- \sum_{\mu=1}^2 \xi_{\mu s}^0 e^{-i\frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} L} \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{e}_{\boldsymbol{\tau}}^s \beta_1 \left[\sum_{\mu=1}^2 \xi_{\mu s}^{\boldsymbol{\tau}} e^{-i\frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} L} \right] e^{i\mathbf{k}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{r}} \right\} \theta(-z) + \\ & + \left\{ \mathbf{e}^s \left[- \sum_{\mu=1}^2 \xi_{\mu s}^0 e^{-i\frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} (L-z)} \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{e}_{\boldsymbol{\tau}}^s \beta_1 \left[\sum_{\mu=1}^2 \xi_{\mu s}^{\boldsymbol{\tau}} e^{-i\frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} (L-z)} \right] e^{i\mathbf{k}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{r}} \right\} \times \\ & \times \theta(L-z)\theta(z) + \mathbf{e}^s e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \theta(z-L), \quad (1.13) \end{aligned}$$

где

$$\xi_{1,2s}^0 = \mp \frac{2\varepsilon_{2,1s} - g_0^s}{2(\varepsilon_{2s} - \varepsilon_{1s})}, \quad \xi_{1,2s}^{\boldsymbol{\tau}} = \mp \frac{g_{-\boldsymbol{\tau}}^s}{2(\varepsilon_{2s} - \varepsilon_{1s})}, \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_{\mu s} = \frac{1}{4} [(1 + \beta_1)g_0^s - \beta_1 \alpha_B] \pm \frac{1}{4} \left\{ [(1 - \beta_1)g_0^s + \beta_1 \alpha_B]^2 + 4\beta_1 g_{\boldsymbol{\tau}}^s g_{-\boldsymbol{\tau}}^s \right\}^{1/2}. \quad (1.15)$$

Остальные обозначения в формулах (1.13)-(1.15) имеют следующее значение: $\gamma_0 = \frac{\mathbf{k}\mathbf{N}}{k}$, $\gamma_1 = \frac{(\mathbf{k}+\boldsymbol{\tau})\mathbf{N}}{k}$, $\beta_1 = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}$, \mathbf{N} – нормаль к поверхности кристалла (совпадает с ортом оси z), $\alpha_B = \frac{2\mathbf{k}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^2}{k^2}$ – параметр, определяющий отклонение от точного условия Брэгга, $\mathbf{k}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$, $\theta(z)$ – функция Хевисайда, \mathbf{e}^s и $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\tau}}^s$ – единичные векторы поляризации падающей и дифрагированной волны соответственно, а волновые векторы (решения дисперсионного уравнения) в кристалле связаны с $\varepsilon_{\mu s}$ следующим образом: $\mathbf{k}_{\mu s} = \mathbf{k} + \frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} \mathbf{N}$. Случай дифракции в геометрии Брэгга и соответствующие выражения для поля можно найти в работе [75].

1.3 Переходное и черенковское излучение

Рассмотрим теперь несколько важных частных случаев излучения равномерно движущейся через мишень заряженной частицы. Будем считать, что

мишень представляет собой плоскопараллельную кристаллическую пластинку толщиной L (рисунок 1.2).

Если показатель преломления кристалла $n(\omega)$ превышает единицу, то движущаяся через пластинку частица может излучать электромагнитные волны благодаря эффекту Вавилова-Черенкова [20, 21]. Кроме того, при пересечении частицей границ “кристалл-внешняя среда (вакуум)” возникает переходное излучение [22]. Выражение для спектрально-углового распределения переходного и черенковского излучения можно получить с помощью общей формулы (1.2), подставляя в неё решения однородных уравнений Максвелла, описывающие процесс преломления плоской электромагнитной волны на кристаллической пластинке. Если показатель преломления кристалла мало отличается от единицы $|n^2 - 1| = |g_0| \ll 1$, то можно пренебречь отражением волны от границ пластинки, и решение задачи будет иметь вид

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(-)s} \approx \mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \theta(z - L) + \mathbf{e}_s e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i\frac{\omega g_0 L}{2c\gamma_0}} \theta(L - z) \theta(z) + \mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\frac{\omega g_0 L}{2c\gamma_0}} \theta(-z), \quad (1.16)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k} + \frac{\omega g_0}{2c\gamma_0} \mathbf{N}$ – волновой вектор в кристалле. Тогда для спектрально-углового распределения переходного и черенковского излучения получается следующее выражение

$$\frac{d^2 N^s}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} (\mathbf{e}_s \mathbf{v})^2 \left| e^{i\frac{\omega L g_0}{2c\gamma_0}} \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - \frac{1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}} \right] \left(e^{i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})\frac{L}{c\gamma_0}} - 1 \right) \right|^2. \quad (1.17)$$

Излучение в кристаллической пластинке с произвольным значением g_0 рассмотрено в [1, 76]; там же приведены соответствующие формулы для спектрально-угловых распределений.

Пусть в некотором диапазоне частот показатель преломления $n(\omega) > 1$, и, соответственно, $g_0(\omega) > 0$. Если скорость частицы превышает фазовую скорость электромагнитной волны в кристалле $v_{ph} = c/n(\omega)$, величина $\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}$ может обращаться в ноль, и слагаемое формулы (1.17), содержащее эту величину в знаменателе, будет расти с увеличением толщины кристалла L . При достаточно больших L ($L \gg l_0 = \lambda\gamma^2$; l_0 – когерентная длина излучения в вакууме, λ – длина волны излучения, γ – лоренц-фактор частицы) это слагаемое будет давать основной вклад в суммарную интенсивность излучения. Наблюдаемая картина соответствует обычному черенковскому излучению, возникающему при движении заряженной частицы в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде. Как известно, это излучение сконцентрировано в узком конусе, образующая которого составляет с направлением скорости частицы угол θ : $\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$, где $\beta = v/c$. В ультррелятивистском случае, когда $\gamma \gg 1$, с учетом малости g_0 , угол раствора черенковского конуса приблизительно равен $\theta_c \approx \sqrt{g_0}$.

Если $L \gg \lambda\gamma^2$, то для оценки интенсивности черенковского излучения может быть использована полученная Таммом и Франком формула [21]. Выведем её из выражения (1.17). Пусть для простоты $\gamma_0 = 1$, т.е. частица падает на пластинку под прямым углом. Будем рассматривать два независимых состояния поляризации – перпендикулярную и параллельную плоскости наблюдения (единичные векторы $\mathbf{e}_\sigma \parallel [\mathbf{k} \times \mathbf{v}]$ и $\mathbf{e}_\pi \perp \mathbf{e}_\sigma \perp \mathbf{k}$). Учитывая малость g_0 и угла θ , а также соотношения $\mathbf{e}_\sigma \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{e}_\pi \mathbf{v} = v \sin \theta$, при $L \gg \lambda\gamma^2$ выражение (1.17) можно переписать в следующем виде

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} \approx \frac{4\alpha Q^2}{\pi^2 \omega} \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \frac{\sin^2 \frac{\omega L}{4c} (\gamma^{-2} + \theta^2 - g_0)}{(\gamma^{-2} + \theta^2 - g_0)^2}, \quad (1.18)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры. Интегрируя (1.18) по угловым переменным (интегрирование по азимутальному углу φ проводится элементарно, а для приближенного интегрирования по полярному углу θ можно выразить $\frac{\sin^2 ax}{x^2}$ через дельта-функцию), получим, что число фотонов, излучаемых частицей в единичном диапазоне частот на пути длиной L , равно [21]

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{\alpha Q^2 L}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right). \quad (1.19)$$

В случае, когда толщина кристалла L сравнима с когерентной длиной $\lambda\gamma^2$, или много меньше её, вклады черенковского и переходного излучения в (1.17), строго говоря, неразделимы. Угловое распределение излучения при этом имеет сложную структуру, а для определения полной интенсивности необходимо проводить интегрирование выражения (1.17) по угловым координатам и частоте с учетом всех членов.

Если величина $g_0(\omega) < 0$, то знаменатель второго слагаемого в формуле (1.17) не может обращаться в ноль, и в кристалле возможно только переходное излучение. Это излучение, в отличие от черенковского, наблюдается при любых энергиях частицы, т.е. не имеет порога. В ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$ оно сконцентрировано в узком конусе с углом раствора $\theta_t \sim \frac{1}{\gamma}$. Для расчета интенсивности этого излучения также необходимо интегрировать (1.17) с учетом всех членов.

На сегодняшний день черенковское и переходное излучение заряженных частиц очень хорошо исследованы, как теоретически, так и экспериментально, и находят широкое применение на практике в детекторах элементарных частиц, в генераторах электромагнитного излучения и т.д. [22–24]. Обратим внимание, что эти явления имеют место не только для кристаллической мишени, но и в случае, если мишень состоит из аморфного вещества (отдельные рассеиватели в котором расположены хаотическим образом).

1.4 Параметрическое рентгеновское излучение

Другими важными видами излучения равномерно движущейся частицы, характерными уже только для пространственно-периодических сред (кристаллов), являются дифракционное [16, 17] и параметрическое рентгеновское излучение [1, 2, 66]. Поскольку нас в дальнейшем будет в первую очередь интересовать параметрическое излучение, остановимся сейчас на некоторых его особенностях.

Как известно, при выходе за оптическую область спектра, в рентгеновском диапазоне, когда частота фотонов ω становится больше характерных атомных частот, показатель преломления принимает универсальный вид

$$n = 1 - \frac{\omega_l^2}{2\omega^2}, \quad (1.20)$$

где ω_l – Ленгмюровская частота. Таким образом, в рентгеновском диапазоне $n(\omega) < 1$ и, соответственно, излучение Вавилова-Черенкова в рентгеновской области частот отсутствует. Тем не менее в 1971 г. в работах [77, 78] было показано, что именно в рентгеновском диапазоне при движении заряженной частицы с постоянной скоростью через кристалл возникает излучение, названное параметрическим рентгеновским излучением (ПРИ). Это излучение появляется благодаря дифракции фотонов в кристалле: в условиях дифракции поле в кристалле представляет собой сумму нескольких волн, среди которых есть как быстрые, которые можно характеризовать показателем преломления $n < 1$, так и медленные, для которых $n > 1$ [2]. Поскольку физический механизм генерации ПРИ является в известном смысле универсальным, аналог параметрического рентгеновского излучения может наблюдаться и в более низкочастотных диапазонах электромагнитного спектра, от оптического до микроволнового, в том числе в различных искусственных пространственно-периодических средах. Экспериментально ПРИ было впервые обнаружено в 1985 г. [79, 80] и в настоящее время активно исследуется теоретически и экспериментально в связи с многочисленными возможностями его применения, например, для создания компактных перестраиваемых источников монохроматического рентгеновского излучения [2], в том числе рентгеновских лазеров на свободных электронах [81–84], для диагностики пучков релятивистских заряженных частиц [36, 37], наблюдения коллективных эффектов в рентгеновском излучении сгустков релятивистских частиц [85] и т.д. [2, 86, 87].

Спектрально-угловое распределение параметрического излучения может быть получено с помощью выражения (1.2) после подстановки туда решений уравнений Максвелла, описывающих поле в кристалле в условиях дифракции. Угловое распределение представляет собой набор из нескольких пиков

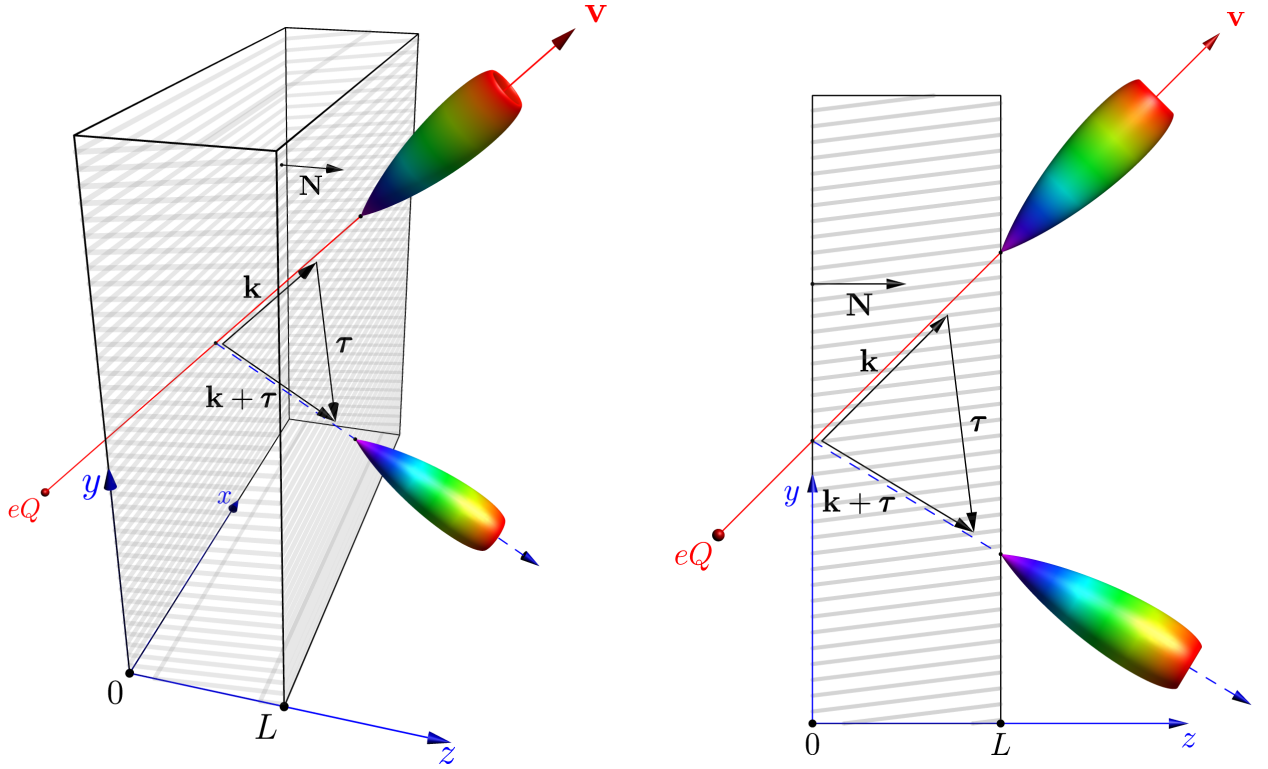


Рисунок 1.3. – Параметрическое излучение в геометрии Лауэ. На рисунках схематически изображены пучки излучения под малым углом к скорости частицы, и в направлении дифракции

(рефлексов), соответствующих излучению под малым углом к направлению движения частицы, и излучению в направлениях, определяемых условиями дифракции (см. рисунок 1.3). Воспользовавшись приведенным в предыдущем разделе решением для случая двухволновой дифракции в геометрии Лауэ (1.13), получим для излучения под малым углом к скорости частицы [2, 75]:

$$\frac{d^2 N_0^s}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} (\mathbf{e}_s \mathbf{v})^2 \times \left| \sum_{\mu=1,2} \xi_{\mu s}^0 e^{i \frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} L} \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} - \frac{1}{\omega - \mathbf{q}_{\mu s} \mathbf{v}} \right] \left(e^{i(\omega - \mathbf{q}_{\mu s} \mathbf{v}) \frac{L}{c\gamma_0}} - 1 \right) \right|^2, \quad (1.21)$$

а для излучения в направлении дифракции

$$\frac{d^2 N_{\tau}^s}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} (\mathbf{e}_s^{\tau} \mathbf{v})^2 \times \left| \sum_{\mu=1,2} \beta_1 \xi_{\mu s}^{\tau} e^{i \frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} L} \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k}_{\tau} \mathbf{v}} - \frac{1}{\omega - \mathbf{q}_{\tau \mu s} \mathbf{v}} \right] \left(e^{i(\omega - \mathbf{q}_{\tau \mu s} \mathbf{v}) \frac{L}{c\gamma_0}} - 1 \right) \right|^2, \quad (1.22)$$

где $\mathbf{q}_{\mu s} = \mathbf{k} + \frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} \mathbf{N}$ – корни дисперсионного уравнения, $\mathbf{q}_{\tau \mu s} = \mathbf{q}_{\mu s} + \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}_1 \parallel [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}]$, $\mathbf{e}_2 \parallel [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1]$, а остальные обозначения такие же, как в предыдущем

разделе. Выражения для спектрально-углового распределения параметрического излучения в случае Брэгга, когда прямая и дифрагированные волны покидают кристалл через противоположные поверхности, приведены в [2, 75].

Обратим внимание, что выражения для спектрально-углового распределения параметрического излучения (1.21)-(1.22) по своей структуре очень похожи на соответствующие выражения для обычного черенковского и переходного излучения (1.17). Основное отличие состоит в том, что в аморфной среде (или в кристалле вдали от условий Вульфа-Брэгга) распространяется только одна преломленная волна с волновым вектором \mathbf{q} , тогда как при выполнении условий дифракции в кристалле распространяется когерентная суперпозиция нескольких волн с волновыми векторами $\mathbf{q}_{\mu s}$, и в формулах для спектрально-углового распределения стоит сумма членов, соответствующих каждой такой волне. Вдали от условий дифракции выражения (1.21)-(1.22) переходят в (1.17).

Если $g_0(\omega) < 0$, то в случае двухволновой дифракции только для одного корня $\mathbf{q}_{\mu s}$ показатель преломления превышает единицу, и соответствующая разность $\omega - \mathbf{q}_{\mu s} \mathbf{v}$ (или $\omega - \mathbf{q}_{\tau \mu s} \mathbf{v}$) может обращаться в ноль. Член, содержащий указанную разность в знаменателе, будет вносить определяющий вклад в интенсивность излучения при больших толщинах кристалла ($L \gg \lambda \gamma^2$), и уравнения (1.21)-(1.22) существенно упростятся. В результате оказывается возможным получить аналитические выражения для полной интенсивности излучения. В частности, как показано в [2], число фотонов параметрического излучения, излучаемых частицей в направлении дифракции, с точностью до множителя $\ln \gamma \theta_D$ (θ_D – угол, внутри которого регистрируется излучение) оценивается с помощью простой формулы

$$N_{tot}^s \approx \frac{\alpha Q^2 k_B L}{4\pi \sin^2 \theta_B} |g_{\tau}^s(\omega_B)|^2, \quad (1.23)$$

где θ_B – угол Брэгга, $\omega_B = k_B c$ – частота, при которой выполняются условия Брэгга.

1.5 Дифракция и излучение в кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами

Дифракция в трёхмерно-периодических средах (кристаллах) может быть описана с помощью системы уравнений (1.9). Все особенности, появляющиеся в случае, когда кристалл состоит из анизотропно рассеивающих центров, определяются угловой зависимостью величин g_{τ} . Рассмотрим несколько хорошо известных случаев, когда эта зависимость имеет специальный вид.

В динамической теории дифракции рентгеновских лучей величины g_{τ} могут быть выражены через амплитуду рассеяния рентгеновского фотона на отдельном атоме. Поскольку электромагнитные волны, к которым фактически и относятся рентгеновские лучи, являются векторными волнами, то и амплитуда рассеяния является в этом случае векторной величиной. Её можно, в частности, представить в виде суммы двух компонент, поляризованных перпендикулярно и параллельно плоскости рассеяния [74] (σ - и π -поляризация соответственно):

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = e_{\sigma}^i f_{\sigma}(\theta) \mathbf{e}_{\sigma} + e_{\pi}^i f_{\pi}(\theta) \mathbf{e}_{\pi}, \quad (1.24)$$

где e_{σ}^i и e_{π}^i – составляющие вектора поляризации исходной плоской волны, перпендикулярные и параллельные плоскости рассеяния, а \mathbf{e}_{σ} и \mathbf{e}_{π} – единичные векторы соответствующих поляризаций. Для Томсоновского рассеяния на свободном электроне амплитуды $f_{\sigma}(\theta)$ и $f_{\pi}(\theta)$ имеют вид [74]

$$f_{\sigma}^T(\theta) = -r_0, \quad f_{\pi}^T(\theta) = -r_0 \cos \theta, \quad (1.25)$$

где $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$ – классический радиус электрона. При рассмотрении дифракции рентгеновских лучей можно принять, что амплитуда рассеяния на атоме связана с Томсоновской амплитудой следующим образом [64, 74, 88]

$$f_{\sigma}(\theta) = f_{\sigma}^T \rho(\mathbf{q}) = -r_0 \rho(\mathbf{q}), \quad (1.26)$$

$$f_{\pi}(\theta) = f_{\pi}^T \rho(\mathbf{q}) = -r_0 \rho(\mathbf{q}) \cos \theta, \quad (1.27)$$

где $\rho(\mathbf{q})$ – фурье-образ плотности распределения электронов в атоме, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ – переданный при рассеянии импульс (при упругом рассеянии $q \equiv |\mathbf{q}| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$). Такой вид угловой зависимости амплитуды рассеяния в конечном счете приводит к тому, что в системе уравнений динамической дифракции (1.10) можно положить

$$g_0^{\pi} = g_0^{\sigma}, \quad g_{\tau}^{\pi} = g_{\tau}^{\sigma} \cos 2\theta_B, \quad (1.28)$$

где θ_B – угол Брэгга (в данном случае индексы “ σ ” и “ π ” определяют поляризацию относительно *плоскости дифракции*, проходящей через векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}_{τ}). Другими словами, равенства (1.28) означают, что система уравнений (1.10) для π -поляризации отличается от аналогичной системы для σ -поляризации только наличием дополнительных множителей $\cos 2\theta_B$ при коэффициентах g_{τ} [64].

Рассмотренная особенность угловой зависимости величин g_{τ} , разумеется, влияет и на процессы излучения фотонов релятивистскими заряженными частицами, пролетающими через кристалл. Так, например, при анализе параметрического рентгеновского излучения было выяснено, что угловое распределение излучения (в отдельном рефлексе) существенно зависит от угла

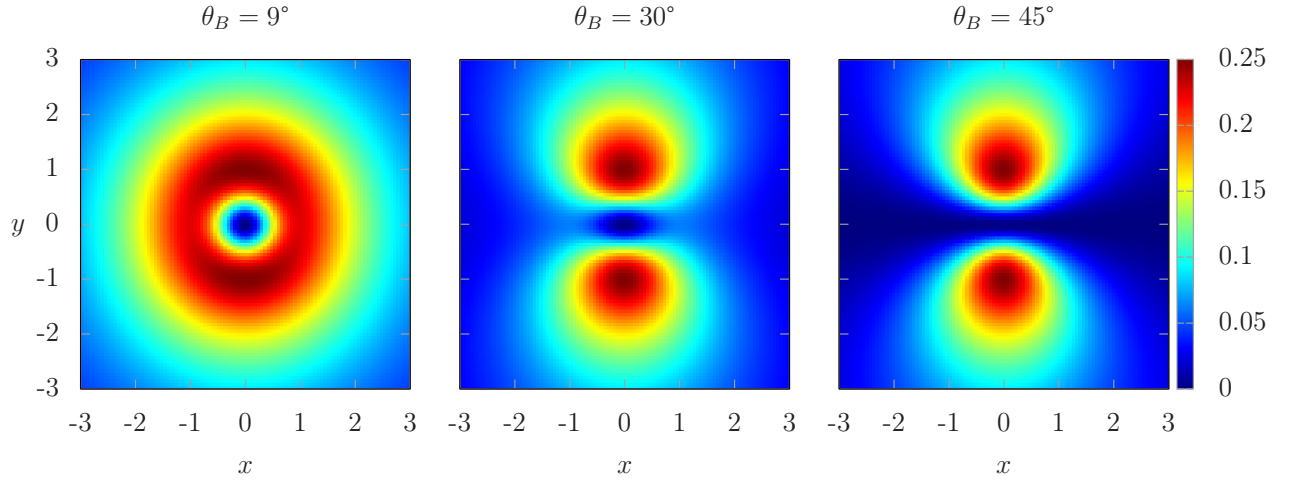


Рисунок 1.4. – Угловое распределение ПРИ в направлении дифракции для различных углов Брэгга (угловые переменные умножены на лоренц-фактор: $x = \gamma\theta_x$ и $y = \gamma\theta_y$, детали см. в [2])

Брэгга [2]. Если в случае малых углов Брэгга две поляризации вносят приблизительно одинаковые вклады в суммарную интенсивность, и угловое распределение ПРИ является практически симметричным (см. рисунок 1.4), то при больших углах в излучении преобладает σ -поляризованная компонента, и угловое распределение принимает вид, показанный на рисунке 1.4 справа. В частности, если угол Брэгга $\theta_B = 45^\circ$, то π -поляризованная компонента в рефлексе вообще отсутствует (т.к. $\cos 2\theta_B = 0$), и излучение полностью поляризовано перпендикулярно плоскости дифракции.

Известно, однако, что представление амплитуд рассеяния f_σ и f_π в виде (1.26)-(1.27) применимо не всегда, даже в рентгеновском диапазоне [74]. Более того, при рассмотрении дифракции в искусственных (фотонных) кристаллах, отдельные рассеиватели (“атомы”) в которых являются макроскопическими телами (шариками, проволочками и т.д.), такое представление часто вообще оказывается невозможным. Пусть, например, кристалл состоит из расположенных в узлах трехмерной решётки сфер. Для простоты будем считать сферы идеально проводящими. Тогда, если их радиус R много меньше длины волны $kR \ll 1$, амплитуды рассеяния на отдельной сфере можно представить в виде [89, 90]

$$f_\sigma(\theta) = k^2 R^3 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cos \theta + i \frac{2}{3} k^3 R^3 \left(1 + \frac{1}{4} \cos \theta \right) \right\}, \quad (1.29)$$

$$f_\pi(\theta) = k^2 R^3 \left\{ -\frac{1}{2} + \cos \theta + i \frac{2}{3} k^3 R^3 \left(\frac{1}{4} + \cos \theta \right) \right\}. \quad (1.30)$$

Здесь, как видно, амплитуда для π -поляризации содержит постоянную (независящую от угла θ) составляющую $-k^2 R^3/2 + ik^5 R^6/6$, которой не было бы

при представлении в виде (1.26)-(1.27). Поэтому угловые распределения параметрического излучения в таком кристалле могут существенно отличаться от угловых распределений ПРИ. Кроме того, отметим, что рассеяние электромагнитной волны на сфере даже в длинноволновом случае является анизотропным (обе амплитуды f_σ и f_π зависят от угла), и поэтому формулы (1.6) для показателя преломления и (1.11) для эффективных поляризуемостей g_τ в рассмотренном случае неприменимы.

То же самое можно сказать и про кристаллы, образованные параллельными металлическими нитями, активно исследуемые в настоящее время [91–98]. В этом случае рассеяние волны, вектор \mathbf{E} которой поляризован параллельно осям нитей, является изотропным только в длинноволновом пределе ($kR \ll 1$, где R – радиус нити). Амплитуда рассеяния волны с перпендикулярной поляризацией, напротив, зависит от угла даже при $kR \ll 1$, причем также имеет постоянную составляющую: $f_\perp = f_0 + f_1 \cos \theta$ [67, 99].

Исследованию излучения в кристаллах из металлических нитей посвящен ряд работ [52–63]. В большинстве из них авторы ограничиваются рассмотрением параллельной поляризации и случая $kR \ll 1$. Этому способствует малая величина амплитуды рассеяния для перпендикулярной поляризации ($|f_\perp| \ll |f_\parallel|$): взаимодействием перпендикулярно поляризованной волны с кристаллом обычно просто пренебрегают. Тем не менее, в ряде работ исследователи уже сталкивались с необходимостью рассмотрения свойств кристаллов из нитей в условиях, когда рассеяние на отдельной нити анизотропно. Так, в статье [61] авторы изучали параметрическое излучение в фотонном кристалле из металлических нитей. Было показано, что интенсивность излучения растет при увеличении параметра kR (величина g_τ для параллельной поляризации, вычисленная в соответствии с (1.12) имеет особенность при $kR \approx 0.89$). Определить пределы этого роста, однако, оказалось невозможным, поскольку используемая в [61] для анализа теория дифракции в таких кристаллах справедлива только в случае достаточно тонких нитей ($kR \ll 1$). При больших kR ($kR \sim 1$) анализ усложняется, поскольку даже для параллельной поляризации рассеяние на нити в этом случае анизотропно. Кроме того, при $kR \sim 1$ амплитуды рассеяния f_\parallel и f_\perp становятся одного порядка, и, более того, их нельзя считать малыми ($|\pi f| \sim 1$). Таким образом, для анализа параметрического излучения в фотонном кристалле из металлических нитей при больших kR необходимо обобщение теории дифракции [60, 61] на случай, когда рассеяние на отдельной нити анизотропно, и амплитуда рассеяния велика.

1.6 Индуцированное излучение заряженных частиц в кристалле

Спонтанное излучение фотонов частицами пучка приводит к появлению и индуцированного излучения, что в настоящее время активно используется для создания лазеров (мазеров) на свободных электронах, работающих в широком диапазоне спектра от миллиметрового и субмиллиметрового до рентгеновского [100, 101].

В работах [82, 83] было показано, что вследствие дифракции фотонов пороговые плотности тока, необходимые для генерации индуцированного рентгеновского излучения в кристалле, существенно уменьшаются и составляют $j \sim 10^7 - 10^8$ А/см², что находится на уровне, достигнутом в настоящее время. Для получения условий генерации важнейшим оказывается анализ радиационной неустойчивости пучка заряженных частиц [102]. Напомним здесь, что такой анализ основан на решении дисперсионного уравнения $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$, описывающего излучающую систему (“кристалл + пучок”). В работах [83, 103–106] были найдены решения такого дисперсионного уравнения — зависимости $\mathbf{k}(\omega)$ и $\omega(\mathbf{k})$, — для всех механизмов спонтанного излучения релятивистских частиц в кристаллах. Было показано, что инкремент радиационной неустойчивости (мнимая часть k_z) в комптоновском режиме резко возрастает вблизи области пересечения корней дисперсионного уравнения. Например, если в спонтанном излучении вследствие брэгговской дифракции возбуждаются две волны в кристалле, то инкремент неустойчивости оказывается пропорциональным не $\rho^{1/3}$ (как это имеет место для ЛСЭ [100, 101, 107]), а $\rho^{1/4}$, где ρ — плотность пучка (см. рисунок 1.5). В общем случае многоволновой дифракции инкремент неустойчивости $\text{Im } k_z \sim (A\rho)^{1/(s+3)}$, где s — число дополнительных волн в системе, возникающих в результате дифракции ($s = 1$ для двухволновой дифракции, $s = 2$ для трёхволновой и т.д.), а константа A зависит от геометрии дифракции и $g_{\mathbf{r}}$. Поскольку $|A\rho| \ll 1$ (см. [108, 109]), то при увеличении числа волн, участвующих в образовании обратной связи, инкремент увеличивается; фактически при этом растёт добротность резонатора, образованного кристаллом. Как следствие, падает и пороговый ток генерации:

$$j_{th} \sim \frac{1}{(kL)^{3+2s}}. \quad (1.31)$$

Дальнейший анализ показал, что указанные особенности генерации индуцированного рентгеновского излучения в естественных кристаллах носят общий характер и справедливы для различных типов излучения в широком диапазоне длин волн, от рентгеновского до оптического и микровол-

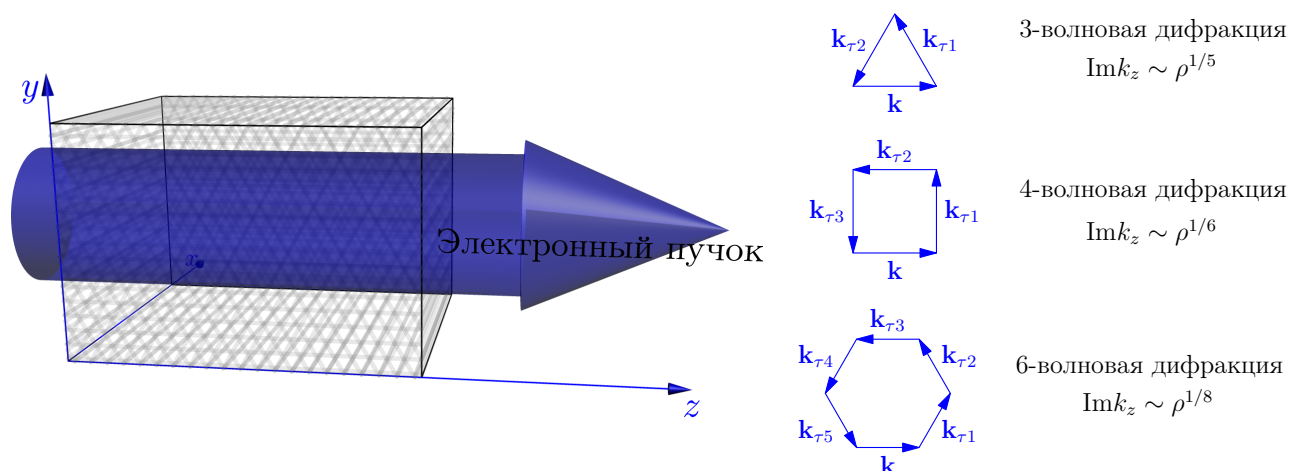


Рисунок 1.5. – Электронный пучок, движущийся через кристалл, и зависимость инкремента неустойчивости от плотности пучка

нового [103, 105, 109–111]. При этом в общем случае роль кристалла может играть любая пространственно-периодическая среда, в том числе двумерные и трёхмерные фотонные кристаллы, для корректного анализа процессов излучения в которых зачастую необходимо учитывать анизотропный характер рассеяния волны на отдельных составляющих кристалл элементах.

1.7 Выводы к главе 1

Проведенный анализ существующих исследований по дифракции и излучению волн в кристаллах, как естественных, так и искусственных (фотонных) показал, что случай анизотропного рассеяния на отдельном центре для них изучен недостаточно. В частности, выражения для показателя преломления и эффективных поляризуемостей (1.6) и (1.11), правильно описывающие поглощение в кристалле (в отличие от формулы (1.5), справедливой для хаотической среды), получены в предположении изотропного рассеяния. Во многих практически важных случаях это предположение не выполняется, и требуется обобщение этих формул на случай произвольной зависимости амплитуды от угла рассеяния. Такое обобщение является особенно важным, поскольку позволит правильно описать не только распространение волн в кристаллах, но и излучение волн заряженными частицами, движущимися через подобные кристаллы, что позволит приблизиться к решению актуальной задачи создания мощных генераторов электромагнитного излучения для широкого диапазона частот, от микроволновых до ТГц и оптических.

Таким образом, в настоящее время в научной среде существует определенный запрос на развитие теории дифракции и излучения в кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами. Данное диссертацион-

ное исследование полностью посвящено данной задаче. В следующих главах приведены подробные решения задач преломления и дифракции в трёхмерных и двумерных кристаллах. С помощью полученных выражений для показателей преломления и эффективных поляризуемостей проведен анализ процессов распространения волн в фотонном кристалле, образованном металлическими нитями. Рассмотрены спонтанное черенковское, переходное и параметрическое излучение в таком кристалле при больших kR , когда рассеяние анизотропно, а амплитуда рассеяния велика. Кроме того, приведены результаты исследования индуцированного излучения релятивистского электронного пучка в таком кристалле.

ГЛАВА 2

ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В ТРЕХМЕРНЫХ КРИСТАЛЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ АНИЗОТРОПНО РАССЕЙВАЮЩИМИ ЦЕНТРАМИ

В данной главе рассматриваются процессы преломления и дифракции волн в естественных и искусственных кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами. Особое внимание уделяется анализу многократного перерассеяния волн на составляющих кристалл центрах. Показано, что в выражение для показателя преломления должны входить не диагональные элементы матрицы рассеяния T_l , как это имеет место для хаотической среды, а величины $\frac{T_l}{1 - i\pi T_l}$, совпадающие в случае упругого рассеяния с диагональными элементами матрицы реакций K_l . Этими же величинами определяются и эффективные поляризуемости кристалла. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [З-А, 11-А, 21-А].

2.1 Рассеяние на одиночном центре

2.1.1 Метод парциальных волн

Для определенности будем считать, что рассеивающий потенциал обладает сферической симметрией; ограничимся случаем рассеяния скалярных волн. Поскольку в сферически-симметричном поле момент импульса является интегралом движения, исходную плоскую волну $\Psi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ удобно представить в виде суперпозиции парциальных волн – сферических волн с определённой величиной момента импульса, и отдельно рассмотреть рассеяние каждой такой волны. Напомним, что волновую функцию состояния с определённой величиной момента импульса (квантовым числом l) и его проекцией (квантовым числом m) можно представить в виде [69] $\psi_{klm} = R_{kl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, где Y_{lm} – сферические функции, а радиальные функции $R_{kl}(r) = 2kj_l(kr)$, где j_l – т.н. сферические функции Бесселя. Зная асимптотическое поведение функций Бесселя, находим, что на больших расстояниях от начала координат $R_{kl} \approx \frac{2}{r} \sin(kr - \frac{\pi l}{2})$, а вблизи начала координат $R_{kl} \approx \frac{2k^{l+1}}{(2l+1)!!} r^l$. В теории рассеяния, однако, вместо функций R_{kl} часто используются функции $R_{kl}^-(r) = -ikh_l^{(2)}(kr)$, соответствующие сходящимся к центру и функции $R_{kl}^+(r) = +ikh_l^{(1)}(kr)$, соответствующие расходящимся от центра сферическим

волнам ($h_l^{(1,2)}$ – сферические функции Ганкеля 1-го и 2-го рода). Предельные выражения для них при $kr \gg 1$ и вблизи начала координат имеют вид

$$R_{kl}^{\pm} \approx \frac{1}{r} e^{\pm i(kr - \pi l/2)}, \quad kr \gg 1; \quad (2.1)$$

$$R_{kl}^{\pm} \approx \frac{(2l-1)!!}{k^l} r^{-l-1}, \quad r \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где $(2l-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l-1)$.

Пусть направление распространения исходной плоской волны совпадает с направлением оси z прямоугольной декартовой системы координат: $\Psi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \equiv e^{ikz}$. Будем считать, что рассеиватель расположен в начале координат. Так как функция e^{ikz} обладает аксиальной симметрией вокруг оси z , то в её разложение по парциальным волнам входят только сферические функции, не зависящие от угла φ (т.е. $m = 0$). Как показано, например, в [69], это разложение имеет вид:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) = -\frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l (R_{kl}^+ - R_{kl}^-) P_l(\cos \theta), \quad (2.3)$$

где P_l – многочлены Лежандра. Учитывая (2.1), легко видеть, что на больших расстояниях от центра каждая парциальная волна в (2.3) представляет собой сумму двух сферических волн: расходящейся от центра и сходящейся к центру.

Решение задачи рассеяния $\Psi(\mathbf{r})$ можно искать в виде, аналогичном (2.3):

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) R_l^*(r), \quad (2.4)$$

где $R_l^*(r)$ – неизвестная функция. Согласно [68] асимптотическое выражение для $R_l^*(r)$ при $kr \gg l$ можно записать в следующем виде

$$R_l^*(r) = -R_{kl}^- + S_l R_{kl}^+ \approx \frac{i}{2r} \left\{ e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l e^{i(kr - l\pi/2)} \right\}. \quad (2.5)$$

Коэффициент S_l в (2.5) является диагональным матричным элементом матрицы рассеяния S , соответствующим орбитальному моменту l [68, 69].

Окончательно волновая функция $\Psi(\mathbf{r})$ при $kr \gg l$ представляет собой сумму падающей плоской волны и расходящейся из центра рассеянной сферической волны

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + \Psi_{sc}(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \sum_{l=0}^{\infty} i^l f_l R_{kl}^+(r) P_l(\cos \theta) \approx e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.6)$$

где введено обозначение $f_l = \frac{i}{2k}(2l+1)(1-S_l)$, а амплитуда рассеяния $f(\theta)$ выражается через парциальные амплитуды следующим образом:

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-S_l)P_l(\cos\theta) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos\theta). \quad (2.7)$$

Для дальнейшего изложения важно установить соответствие между амплитудой парциальной волны, воздействующей непосредственно на рассеиватель, и амплитудой результирующей рассеянной волны. Это легко сделать, сравнивая почленно выражение для рассеянной волны (2.6) и выражение для падающей волны (2.3), в котором для функций $j_l(kr)$ подставлены их предельные значения при $r \rightarrow 0$ (т.е. вблизи рассеивателя). В итоге получаем, что при воздействии на рассеиватель парциальной волны $\Psi_l^0 = i^l k^l r^l P_l(\cos\theta)$ рассеянная волна на больших расстояниях от центра будет выглядеть следующим образом

$$\Psi_l^{sc} = (2l-1)!! i^l f_l R_{kl}^+(r) P_l(\cos\theta) \approx (2l-1)!! f_l \frac{e^{ikr}}{r} P_l(\cos\theta). \quad (2.8)$$

2.1.2 Матрица рассеяния

В квантовой механике при описании процессов рассеяния широко используется т.н. оператор рассеяния \hat{S} [68]. Для более ясного понимания последующего изложения полезно напомнить его основные свойства. Обычно процесс рассеяния представляется как процесс столкновения и взаимодействия двух частей замкнутой физической системы (частица-мишень + рассеивающаяся частица). Пусть волновая функция начального состояния есть $\Phi_a(-\infty)$; она описывает в момент времени $t = -\infty$ относительное движение двух сталкивающихся подсистем и их внутренние состояния. Предполагается, что при $t = -\infty$ две подсистемы находятся на большом расстоянии друг от друга, так что их взаимодействием можно пренебречь. Тогда оператор рассеяния \hat{S} определяет асимптотическое поведение волновой функции конечного состояния $\Psi_a(\infty)$:

$$\Psi_a(\infty) = \hat{S}\Phi_a(-\infty). \quad (2.9)$$

Оператор рассеяния может быть определен через оператор Гамильтона H рассматриваемой системы следующим образом [68]

$$\hat{S} = \lim_{t \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow -\infty} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H(t - t_0) \right\}. \quad (2.10)$$

Функция $\Psi_a(\infty)$ описывает все возможные конечные состояния системы, которые могут реализоваться в результате столкновения двух подсистем, находившихся при $t = -\infty$ в состоянии $\Phi_a(-\infty)$. Пусть Φ_b – одно из таких возможных конечных состояний. Вероятность w_{ba} того, что система при $t = \infty$ будет находиться в этом состоянии, определяется соответствующим матричным элементом оператора \hat{S} (матрицы рассеяния) [68]:

$$w_{ba} = |\langle \Phi_b | \hat{S} | \Phi_a \rangle|^2 \equiv |\langle b | \hat{S} | a \rangle|^2 \equiv |S_{ba}|^2.$$

Естественно, что сумма вероятностей перехода во все возможные конечные состояния должна быть равна 1, это условие приводит к требованию унитарности матрицы рассеяния S . Кроме того, из определения оператора \hat{S} следует, что матрица рассеяния должна быть диагональна по квантовым числам, соответствующим интегралам движения в системе. В частности, поскольку в центрально-симметричном поле сохраняется момент количества движения, то матрица рассеяния в этом случае диагональна по квантовому числу полного момента j ; если же при взаимодействии отдельно сохраняется орбитальный момент количества движения, то матрица рассеяния к тому же диагональна по квантовому числу l . Можно показать, что коэффициенты S_l , характеризующие амплитуду расходящейся сферической волны в (2.5), как раз являются диагональными (по l) элементами матрицы рассеяния. В случае упругого рассеяния $|S_l| = 1$ и матричный элемент S_l может быть выражен [68] через действительные фазовые смещения δ_l : $S_l = e^{2i\delta_l}$. Отметим, что матрица рассеяния S не является эрмитовой. Например, в простейшем случае упругого рассеяния матрица S диагональна по квантовым числам l ; при этом диагональные элементы S_l совпадают с её собственными числами. Тем не менее, величины $S_l = e^{2i\delta_l}$ даже в этом случае комплексны, тогда как собственные числа любой эрмитовой матрицы должны быть действительными. Обратим внимание также, что в общем случае неупругого рассеяния модуль диагонального матричного элемента $|S_l| < 1$.

Очевидно, что если рассеяние отсутствует, то $S_{ba} = \delta_{ba}$. Учитывая также, что полная энергия является интегралом движения, для описания процесса рассеяния оказывается удобным ввести оператор \hat{T} (т.н. T -оператор или T -матрица), матричные элементы которого на *энергетической поверхности* определяются следующим соотношением [68]:

$$S_{ba} = \delta_{ba} - 2\pi iT_{ba}\delta(E_b - E_a), \quad (2.11)$$

где E_b, E_a – полная энергия состояний b и a соответственно. Так же, как и матрица рассеяния S , T -матрица не является эрмитовой; кроме того, она обладает похожими свойствами симметрии, в частности, диагонализуется одно-

временно с матрицей S . Отметим однако, что T -матрица, в отличие от матрицы рассеяния S , не является унитарной. Полезно также напомнить, что матричные элементы T -матрицы пропорциональны амплитуде рассеяния (или амплитуде реакции, если она имеет место). В частности, если пользоваться представлением моментов (2.7), то парциальные амплитуды f_l следующим простым образом выражаются через матричные элементы T_l :

$$f_l = -\frac{\pi}{k}(2l+1)T_l. \quad (2.12)$$

Иногда может оказаться удобным задавать асимптотику волновой функции на бесконечности не в виде суперпозиции сходящихся и расходящихся волн, как в выражении (2.5), а в виде стоячих волн [73]:

$$R_l^* \sim \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + K_l \cos(kr - \frac{l\pi}{2}). \quad (2.13)$$

В представлении стоячих волн роль оператора рассеяния будет играть новый оператор \hat{K} (соответствующую матрицу обычно называют матрицей реакций); он, так же как и \hat{S} , позволяет в принципе решать любую задачу рассеяния [73, 113]. Важно отметить, что введенная матрица реакций K является эрмитовой ($K^\dagger = K$), и таким образом, её собственные числа действительны. Матричные элементы оператора \hat{K} на энергетической поверхности связаны с матричными элементами T -матрицы т.н. уравнениями Гайтлера [70, 113]:

$$K_{ba} = T_{ba} + i\pi \sum_c K_{bc} T_{ca} \delta(E_c - E_a). \quad (2.14)$$

Связь (2.14) приобретает особенно простой вид, когда матрицы K и T диагональны; например в представлении моментов при упругом рассеянии она выглядит следующим образом:

$$K_l = \frac{T_l}{1 - i\pi T_l}. \quad (2.15)$$

Приведенных основных сведений о матрицах рассеяния достаточно для наших целей. Детальное изложение квантовой теории рассеяния и свойств матриц S , T , K приведено в литературе [68, 73, 113].

2.2 Распространение волн в кристалле

Перейдем теперь к анализу распространения волн в кристалле. Здесь следует различать два случая, в зависимости от того, выполняются или нет условия дифракции Вульфа-Брэгга ($|\mathbf{k}| \approx |\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}|$, где $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной

решетки кристалла). Рассмотрим случай когда условия дифракции не выполнены, и по кристаллу распространяется одна преломлённая волна. При этом будем полагать, что показатель преломления мало отличается от единицы $|n^2 - 1| \ll 1$. Для начала проанализируем рассеяние на одной кри-

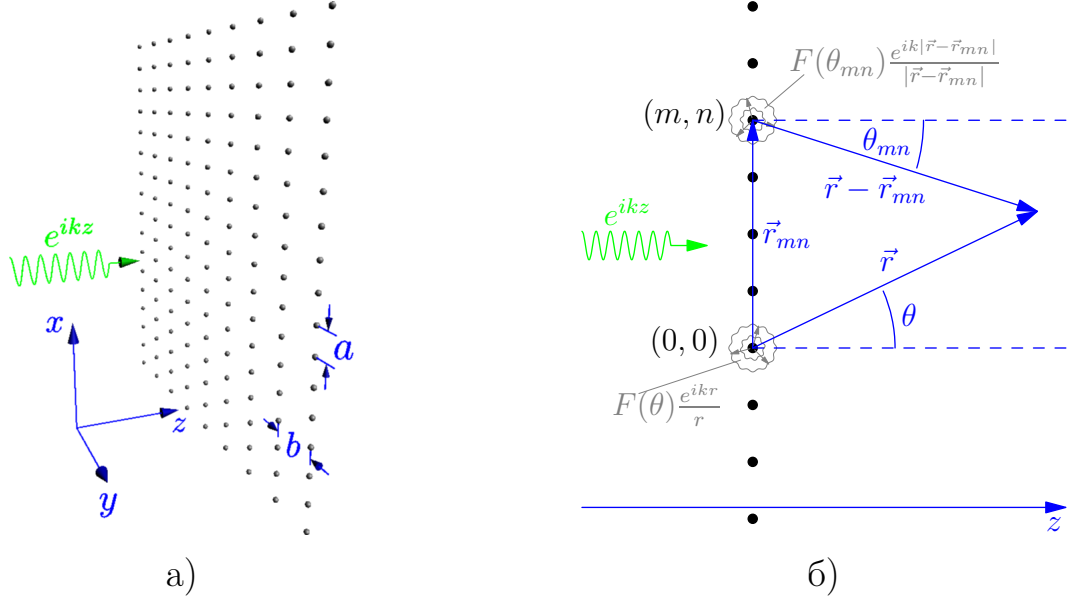


Рисунок 2.1. – Рассеяние плоской волны двумерной решёткой: а) геометрия задачи; б) соотношение между углами θ и $\theta_{m,n}$

сталлической плоскости. Пусть плоская волна $\Psi_0 = e^{ikz}$ нормально падает на двумерную решетку рассеивающих центров. Координаты рассеивателей зададим в виде $\mathbf{r}_{m,n} = (x_{m,n}, y_{m,n}, z_{m,n}) = (ma, nb, 0)$, где m, n – целые числа, a, b – периоды решетки (рисунок 2.1).

Не будем пока учитывать многократное перерассеяние волн, когда волна, рассеянная на одном центре, перерассеивается на других и т.д. Тогда прошедшая через решетку волна $\Psi(\mathbf{r})$ может быть записана в виде суммы падающей плоской волны и рассеянных с амплитудой $f(\theta)$ сферических волн:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + ik \sum_{m,n,l} i^l f_l h_l(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}|) P_l(\cos \theta_{m,n}), \quad (2.16)$$

где $\theta_{m,n}$ – угол между векторами \mathbf{k} и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}$. Сумму в предыдущем выражении можно преобразовать по правилу Пуассона. В частности, при $l = 0$ суммирование по m, n приводит к выражению

$$ik \sum_{m,n} h_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}|) = \sum_{m,n} \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}|} = \frac{2i\pi}{kab} e^{ik|z|} + \frac{1}{ab} \sum_{m,n \neq (0,0)} \Phi\left(\frac{2\pi m}{a}, \frac{2\pi n}{b}\right), \quad (2.17)$$

где функция $\Phi(\alpha, \beta)$ определяется следующим образом:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{2i\pi e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}} e^{i\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}|z|}, & \text{если } k^2 > \alpha^2 + \beta^2; \\ \frac{2\pi e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}} e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}|z|}, & \text{если } k^2 < \alpha^2 + \beta^2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Для простоты получаемых выражений положим, что выполняются условия $ka < 2\pi$, $kb < 2\pi$. Тогда второе слагаемое в (2.17) оказывается сильно затухающей волной и при больших z (как правило, уже при $z \sim a, b$) можно с хорошей точностью считать, что в результате взаимодействия плоской волны единичной амплитуды e^{ikz} с двумерной решёткой изотропно рассеивающих центров (пока рассмотрен случай $l = 0$) возникает плоская волна с амплитудой $\left(1 + \frac{2i\pi f_0}{kab}\right)$. Полностью аналогичный результат получается и в случае хаотичного расположения рассеивателей в плоскости $z = 0$.

Отметим, что при бóльших значениях k в результате рассеяния может появляться не одна, а несколько плоских волн с различными направлениями волнового вектора. Например, если $2\pi < ka < 4\pi$, $kb < 2\pi$, то при рассеянии на двумерной решётке, как легко видеть из (2.17)-(2.18), результирующее поле будет являться суперпозицией трёх плоских волн с волновыми векторами $k\mathbf{e}_z$, $\frac{2\pi}{a}\mathbf{e}_x + \sqrt{k^2 - (2\pi/a)^2}\mathbf{e}_z$ и $-\frac{2\pi}{a}\mathbf{e}_x + \sqrt{k^2 - (2\pi/a)^2}\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ – орты координатных осей). Тем не менее для простоты изложения мы будем считать далее, что в результате рассеяния на двумерной решётке появляется только одна плоская волна $\frac{2\pi i}{kab}e^{ikz}$, так, как это имеет место в случае $ka < 2\pi$, $kb < 2\pi$. Отметим только, что путём несложных, но достаточно громоздких вычислений (последовательно рассматривая случаи $2\pi < ka < 4\pi$, $4\pi < ka < 6\pi$, $2\pi < kb < 4\pi$ и т.д.) можно строго показать, что учёт дополнительных волн все равно по существу не меняет конечного результата для показателя преломления кристалла, и он остается справедливым при любых k , не попадающих в условия дифракции.

Если значение суммы по m и n при $l = 0$ в (2.16) известно, то случаи $l \neq 0$ вычисляются с помощью известных рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра и сферических функций Ганкеля [67, 114]. Можно показать, что вычисление сумм по m, n при всех l приведет к уже известному результату $\frac{2i\pi}{kab}e^{ikz}$. Тогда окончательно получаем для прошедшей через решетку волны следующее выражение

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} + \frac{2i\pi}{kab}e^{ikz} \sum_l f_l = \left(1 + \frac{2i\pi}{kab}f(0)\right) e^{ikz}, \quad (2.19)$$

где $f(0)$ – амплитуда рассеяния на угол ноль. Рассматривая последова-

тельное рассеяние волны на нескольких (m) решетках, расположенных на расстоянии s друг от друга, получим для прошедшей волны выражение $\Psi(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{2i\pi}{kab}f(0)\right)^m e^{ikz}$. Его можно представить в форме $\Psi(\mathbf{r}) = e^{iknz}$, где показатель преломления n определяется равенством (справедливо при $|n - 1| \ll 1$):

$$n \approx 1 + \frac{2\pi}{k^2\Omega_3}f(0), \quad (2.20)$$

где $\Omega_3 = abc$ – объем элементарной ячейки кристалла. Полученное равенство совпадает с выражением для n в случае хаотически расположенных рассеивателей [65].

В приведенных выше рассуждениях считалось, что рассеяние на отдельных центрах является независимым. На самом деле это не так, поскольку помимо исходной плоской волны на каждом центре рассеиваются также сферические волны, приходящие от всех остальных центров. Учтем такое многократное перерассеяние волн на составляющих решетку центрах. Начнём с анализа процесса перерассеяния на одной кристаллической плоскости. Очевидно, что решение задачи рассеяния будет суммой исходной падающей волны и расходящихся от каждого центра сферических волн одинаковой амплитуды. Однако, в отличие от (2.16), амплитуды этих волн не будут равны амплитуде рассеяния $f(\theta)$ на одиночном рассеивателе.

Обозначим $F(\theta)$ амплитуду рассеяния на центре, входящем в состав двумерной решётки. Так же как и амплитуду $f(\theta)$, представим $F(\theta)$ в виде $F(\theta) = \sum_l F_l P_l(\cos \theta)$. Так как решётка бесконечная, амплитуда $F(\theta)$ не зависит от положения рассеивателя (m, n) , и достаточно определить её значение для расположенного в начале координат рассеивателя (для краткости далее будем называть его опорным). Итак, на опорном центре ($(m, n) = (0, 0)$) рассеиваются с амплитудой $f(\theta)$ две волны: исходная плоская волна $\Psi_0 = e^{ikz}$ и волна

$$\Psi_{sc,0} = ik \sum_{(m,n) \neq (0,0), l} i^l F_l h_l(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}|) P_l(\cos \theta_{m,n}), \quad (2.21)$$

приходящая от всех остальных центров. В результате рассеяния этих двух волн образуется расходящаяся сферическая волна с амплитудой $F(\theta)$. Для нахождения амплитуды $F(\theta)$ необходимо разложить на парциальные волны выражение (2.21), и проанализировать процесс рассеяния, пользуясь изложенным в разделе 2.1.1 методом.

Рассмотрим один из членов суммы (2.21), соответствующий волне, рассе-

янной центром с фиксированными m и n

$$\Psi_{sc}^{(m,n)} = ik \sum_{l=0}^{\infty} i^l F_l h_l(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}|) P_l(\cos \theta_{m,n}).$$

Нетрудно установить, что для углов $\theta_{m,n}$ и θ справедливо следующее соотношение (см. рисунок 2.1, б)):

$$\cos \theta_{m,n} = \frac{r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n}|} \cos \theta. \quad (2.22)$$

Тогда вблизи опорного рассеивателя ($r \rightarrow 0$) волна $\Psi_{sc}^{(m,n)}$ будет иметь вид

$$\Psi_{sc}^{(m,n)} = ik \sum_{j=0}^{\infty} i^j F_j h_j(kr_{m,n}) P_j \left(\frac{r}{r_{m,n}} \cos \theta \right). \quad (2.23)$$

Многочлены Лежандра от аргумента $\cos \theta \cdot r/r_{m,n}$ можно разложить в ряд по многочленам Лежандра аргумента $\cos \theta$

$$P_j \left(\frac{r}{r_{m,n}} \cos \theta \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} \alpha_{lj} P_l(\cos \theta), \quad (2.24)$$

где

$$\alpha_{lj} = (2l + 1) \int_0^{\pi} P_j \left(\frac{r}{r_{m,n}} \cos \theta \right) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2.25)$$

После вычисления интегралов (2.25) и подстановки их значений в (2.23) и (2.24) получаем следующее выражение для волны $\Psi_{sc}^{(m,n)}$, справедливое при $r \rightarrow 0$ (математические детали см. в Приложении А)

$$\begin{aligned} \Psi_{sc}^{(m,n)} &\approx \\ &\approx ik \sum_{l=0}^{\infty} i^l r^l P_l(\cos \theta) \frac{1}{2^l} \frac{1}{(2l-1)!!} \left\{ \frac{1}{r_{m,n}^l} \sum_{j=0}^{\infty} F_{l+2j} h_{l+2j}(kr_{m,n}) \frac{1}{2^{2j}} \frac{(2(l+j))!}{j!(l+j)!} \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Осталось просуммировать выражение (2.26) по всем m, n кроме $(m, n) = (0, 0)$. Будем интересоваться только поправкой к мнимой части амплитуды рассеяния; в этом случае нам достаточно вычислить только действительные части сумм $\sum_{m,n} h_{l+2j}(kr_{m,n}) r_{m,n}^{-l}$. После довольно громоздкой процедуры сум-

мирования (см. Приложение А) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{sc,0} &= \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \Psi_{sc}^{(m,n)} \approx \\ &\approx ik \sum_{l=0}^{\infty} i^l r^l k^l P_l(\cos \theta) \frac{1}{(2l-1)!!} \left\{ -\frac{1}{2l+1} F_l + \frac{2\pi}{k^2 ab} \sum_{j=0}^{\infty} F_{l+2j} \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

С учетом (2.3), (2.27) и предельных выражений для радиальных функций воздействующая на опорный рассеиватель волна при $r \rightarrow 0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_{inc} &= e^{ikz} + \Psi_{sc,0} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)!!} i^l r^l k^l P_l(\cos \theta) \left\{ 1 - ik \frac{F_l}{2l+1} + \frac{2\pi i}{kab} \sum_{j=0}^{\infty} F_{l+2j} \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

В результате взаимодействия этой волны с рассеивателем возникает рассеянная волна, которая в соответствии с (2.8) может быть записана следующим образом

$$\Psi_{sc}^{(0,0)} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l f_l R_{kl}^+(r) P_l(\cos \theta) \left\{ 1 - ik \frac{F_l}{2l+1} + \frac{2\pi i}{kab} \sum_{j=0}^{\infty} F_{l+2j} \right\}. \quad (2.29)$$

С другой стороны, рассеянная опорным центром волна есть просто расходящаяся сферическая волна с амплитудой $F(\theta)$

$$\Psi_{sc}^{(0,0)} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l F_l R_{kl}^+(r) P_l(\cos \theta). \quad (2.30)$$

Приравнивая выражения (2.29) и (2.30), получаем следующую систему уравнений для нахождения парциальных амплитуд F_l

$$F_l = f_l - \frac{ik}{2l+1} f_l F_l + \frac{2i\pi}{kab} f_l F_l + \frac{2i\pi}{kab} f_l \sum_{j=1}^{\infty} F_{l+2j}. \quad (2.31)$$

В случае, когда амплитуда рассеяния мала $|f_l| \ll a$, $|f_l| \ll b$, можно разрешить эту систему и найти выражения для амплитуд F_l :

$$F_l \approx \frac{f_l}{1 + \frac{ik}{2l+1} f_l - \frac{2i\pi}{kab} f_l}. \quad (2.32)$$

Таким образом, в результате взаимодействия волны $\Psi_0(\mathbf{r}) = e^{ikz}$ с двумерной решёткой рассеивающих центров возникает плоская волна, для амплитуды которой получаем вместо (2.19) следующее выражение ($z > 0$):

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \frac{2i\pi}{kab} e^{ikz} \sum_{l=0}^{\infty} F_l. \quad (2.33)$$

При $z < 0$ возникающее в процессе рассеяния волновое поле, представляет собой сумму исходной падающей на решётку волны и волны, отражённой от решетки (см. (2.17))

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \frac{2i\pi}{kab} e^{-ikz} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l F_l. \quad (2.34)$$

Для удобства введём следующие обозначения: $F_0^* \equiv \sum_{l=0}^{\infty} F_{2l}$, $F_1^* \equiv \sum_{l=0}^{\infty} F_{2l+1}$.

Тогда уравнения (2.33)-(2.34) можно более компактно записать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \frac{2i\pi}{kab} (F_0^* \pm F_1^*) e^{ik|z|}, \quad (2.35)$$

где знак “+” соответствует случаю $z > 0$, знак “−” – случаю $z < 0$ (рассеяние вперёд и назад соответственно). Отметим, что выражение (2.35) имеет такой же вид, как и при анализе простейшего случая анизотропного рассеяния ($l = 0, 1$) с амплитудой рассеяния $F^*(\theta) = F_0^* + F_1^* \cos \theta$. Величины $\frac{2i\pi}{kab} (F_0^* \pm F_1^*)$ можно интерпретировать как “амплитуды рассеяния” вперёд (назад) плоской волны двумерной решёткой рассеивающих центров.

Рассмотрим кристалл, образованный множеством рассмотренных двумерных решёток (кристаллических плоскостей), расположенных на расстоянии s друг от друга. Волна Ψ_1 , падающая на решетку, расположенную в начале координат, является суммой волн, рассеянных всеми остальными решетками. Следуя [3–А], положим, что амплитуда этих волн равна $\Phi = (\Phi_0 \pm \Phi_1) e^{iqcm}$, где q – волновое число в кристалле, m – целое число (номер решетки), а Φ_0 и Φ_1 не зависят от m ввиду периодичности кристалла. Тогда Ψ_1 будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \frac{2\pi i}{kab} \Phi_0 \sum_{m \neq 0} e^{iqcm} e^{ikc|m|} + \\ & + \frac{2\pi i}{kab} \Phi_1 \left\{ \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{iqcm} e^{ikc|m|} - \sum_{m=1}^{\infty} e^{iqcm} e^{ikc|m|} \right\}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Поскольку все эти волны рассеиваются на опорной решётке с известной амплитудой $\frac{2i\pi}{kab} (F_0^* \pm F_1^*)$, в результате чего возникает плоская волна с амплитудой $(\Phi_0 \pm \Phi_1)$, то можно записать следующую систему уравнений [3–А]

$$\Phi_0 = F_0^* \left\{ \frac{2\pi i}{kab} \Phi_0 S_3 + \frac{2\pi i}{kab} \Phi_1 S_4 \right\}, \quad (2.37)$$

$$\Phi_1 = F_1^* \left\{ \frac{2\pi i}{kab} \Phi_0 S_4 + \frac{2\pi i}{kab} \Phi_1 S_3 \right\}, \quad (2.38)$$

где суммы S_3 и S_4 равны

$$S_3 = \sum_{m \neq 0} e^{iqcm} e^{ikc|m|} = -1 - i \frac{\sin kc}{\cos kc - \cos qc} \simeq -1 - \frac{2i}{kc} \cdot \frac{1}{q^2/k^2 - 1},$$

$$S_4 = \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-iqcm} - e^{iqcm}) e^{ikcm} = -i \frac{\sin qc}{\cos kc - \cos qc} \simeq -\frac{2i}{kc} \cdot \frac{1}{q^2/k^2 - 1}.$$

Однородная система уравнений (2.37)-(2.38) имеет решение, если её определитель равен нулю. Из этого условия находится следующее соотношение, связывающее между собой q и k (дисперсионное уравнение)

$$1 = \frac{2\pi i}{kb} (F_0^* + F_1^*) S_3 + \left(\frac{2\pi i}{kb} \right)^2 F_0^* F_1^* (S_4^2 - S_3^2). \quad (2.39)$$

Подставляя в это уравнение значения сумм S_3 , S_4 и выражения для амплитуд рассеяния F_0^* , F_1^* , после громоздких, но простых арифметических преобразований находим окончательное выражение для показателя преломления кристалла

$$n^2 = \frac{q^2}{k^2} = 1 + \frac{4\pi}{k^2 \Omega_3} \sum_l \frac{f_l}{1 + \frac{ik}{2l+1} f_l}. \quad (2.40)$$

Легко видеть, что в случае изотропного рассеяния (учет только $l = 0$) это выражение сводится к известной формуле (1.6) для показателя преломления кристалла.

Учитывая связь (2.12)-(2.15) между парциальными амплитудами и матричными элементами T_l и K_l , выражение (2.40) можно представить в следующей форме:

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi^2}{k^3 \Omega_3} \sum_l (2l+1) \frac{T_l}{1 - i\pi T_l}, \quad (2.41)$$

т.е.

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi^2}{k^3 \Omega_3} \sum_l (2l+1) K_l, \quad (2.42)$$

где Ω_3 – объём элементарной ячейки кристалла. Сравним полученные выражения (2.41)-(2.42) для кристалла с выражением, справедливым для случая хаотической среды, образованной такими же рассеивателями

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi\rho}{k^2} f(0) = 1 - \frac{4\pi^2\rho}{k^3} \sum_l (2l+1) T_l, \quad (2.43)$$

где ρ – плотность рассеивателей в среде. Видно, что выражение (2.42), определяющее показатель преломления кристалла, отличается от (2.43) тем, что

вместо диагональных элементов матрицы рассеяния T_l туда входят диагональные элементы матрицы реакций $K_l = \frac{T_l}{1 - i\pi T_l}$. Принципиальная разница между (2.43) и (2.42) заключается в том, что в случае наличия только упругого канала рассеяния на отдельном центре выражение (2.42) действительно, тогда как (2.43) имеет и действительную, и мнимую часть (волна в среде затухает). Действительность (2.42) следует из эрмитовости матрицы K и её диагональности по l в случае наличия только упругого канала рассеяния [113]. Таким образом, если в хаотической среде в ослабление волны дают вклад как процессы неупругого рассеяния на отдельных центрах, так и чисто упругие процессы, то в кристалле ослабление волны может быть обусловлено только процессами неупругого рассеяния (поглощения) на составляющих кристалл центрах.

Полученные результаты (а именно с тот факт, что рассеяние на центре, входящем в состав кристалла, описывается не матричными элементами T_l , а величинами $\frac{T_l}{1 - i\pi T_l}$) необходимо учесть и при рассмотрении дифракции в кристалле. Согласно [64, 115], динамическая дифракция рентгеновского излучения в кристалле может быть описана с помощью следующей системы уравнений

$$\left(1 - \frac{k^2}{k_0^2}\right) \varphi(\mathbf{k}) + \sum_{\boldsymbol{\tau}} g(\boldsymbol{\tau}) \varphi(\mathbf{k} - \boldsymbol{\tau}) = 0, \quad (2.44)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\tau}} \varphi(\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}) e^{i(\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{r}}, \quad (2.45)$$

где $g(\boldsymbol{\tau}) = \frac{4\pi}{k^2 \Omega_3} f(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})$, $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решётки кристалла. В уравнениях (2.44)-(2.45) элементы матрицы рассеяния T_l входят только в величины $g(\boldsymbol{\tau})$ (через амплитуду рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}) \equiv f(\theta_{\boldsymbol{\tau}})$). Заменяя их на $\frac{T_l}{1 - i\pi T_l}$, получим следующее выражение для эффективной поляризуемости

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\tau}) &= \frac{4\pi}{k^2 \Omega_3} \sum_l \frac{f_l}{1 + \frac{ik}{2l+1} f_l} P_l(\cos(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})) = \\ &= -\frac{4\pi^2}{k^3 \Omega_3} \sum_l (2l+1) \frac{T_l}{1 - i\pi T_l} P_l(\cos(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Анализ показывает, что уравнения (2.44)-(2.45), в которых эффективные поляризуемости вычисляются в соответствии с (2.46), полностью описывают поле в кристалле в условиях дифракции. Отметим, что выражение (2.46), справедливое в общем случае анизотропного рассеяния на отдельных цен-

трах, обобщает результаты [65], полученные для изотропного случая, согласно которым при вычислении эффективных поляризуемостей из мнимой части амплитуды рассеяния должен быть исключён вклад в полное сечение, обусловленный упругим когерентным рассеянием.

2.3 Выводы к главе 2

В данной главе рассматривалось влияние многократного перерассеяния на распространение волн в кристаллах, состоящих из анизотропно рассеивающих центров. Впервые получено выражение для показателя преломления кристалла в этом случае. Показано, что, так же как и для изотропного рассеяния, показатель преломления определяется не диагональными элементами матрицы рассеяния T_l , как это имеет место для хаотической среды, а диагональными элементами матрицы реакций K_l .

Значения показателя преломления, вычисляемые в соответствии с выражениями (2.41)-(2.42), справедливыми для кристалла, отличаются от значений, получаемых при помощи классической формулы для хаотической среды (2.43), в первую очередь мнимой частью (в случае идеального кристалла из упругих рассеивателей мнимая часть n вообще равна нулю, т.е. волна в таком кристалле распространяется без затухания). Таким образом, если в хаотической среде в ослабление волны дают вклад как процессы неупругого рассеяния на отдельных центрах, так и чисто упругие процессы, то в кристалле ослабление волны может быть обусловлено только процессами неупругого рассеяния (поглощения) на составляющих кристалл центрах.

Поскольку для описания рассеяния использовался общий подход, полученные результаты справедливы для широкого круга задач. В частности, они могут представлять интерес при изучении дифракции холодных нейтронов в кристаллах, при исследованиях различных нанокристаллических материалов, при проектировании метаматериалов с заданными свойствами и т.д. Отметим также, что развитая теория позволяет описать процессы параметрического и дифракционного излучения в кристаллах из анизотропно рассеивающих центров, подобно тому, как это делается в рамках обычной динамической теории дифракции для изотропного случая.

ГЛАВА 3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В ДВУМЕРНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ АНИЗОТРОПНО РАСSEИВАЮЩИМИ ЦЕНТРАМИ

В данной главе рассматривается распространение электромагнитных волн в фотонном кристалле, образованном параллельными нитями, в условиях, когда рассеяние волны на отдельной нити является анизотропным. Выводится дисперсионное уравнение, связывающее частоту и возможные значения волнового вектора в таком кристалле. Приводятся результаты расчетов показателя преломления и эффективных поляризуемостей такого кристалла. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [3–А, 5–А, 12–А, 13–А, 20–А].

3.1 Рассеяние электромагнитной волны на нити

Рассмотрим двумерный бесконечный кристалл, образованный периодически расположенными рассеивателями. Широко известным примером такого кристалла является фотонный кристалл, образованный параллельными металлическими нитями (рисунок 3.1). Пусть координаты нитей в решётке бу-

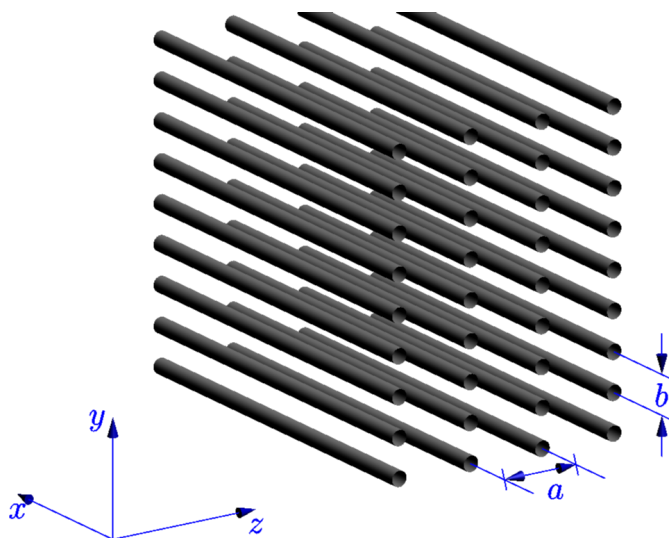


Рисунок 3.1. – Кристалл, образованный параллельными нитями

дут $(z_{mn}, y_{mn}) = (ma, nb)$, где a, b – периоды решётки, m, n – целые числа; оси нитей параллельны оси x прямоугольной декартовой системы координат.

Анализ преломления и дифракции электромагнитных волн в таком кристалле проведем в несколько этапов. Вначале приведем решение задачи о рассеянии электромагнитной волны на одиночной нити (цилиндре). Затем рассмотрим рассеяние на одной кристаллической плоскости (одномерной решётке), образованной периодически расположенными цилиндрами. После этого перейдём к выводу дисперсионного уравнения для бесконечного кристалла.

В отличие от рассмотренного в предыдущей главе трехмерного случая, где в результате рассеяния плоской волны на отдельном центре возникала расходящаяся сферическая волна, при взаимодействии волны с бесконечной нитью возникает рассеянная цилиндрическая волна. Для анализа процесса перерассеяния волн на составляющих кристалл нитях необходимо знать, каким образом на нити рассеиваются *цилиндрические* волны. Перед тем как перейти к рассмотрению такого рассеяния, напомним, как взаимодействует с нитью обычная плоская волна.

3.1.1 Рассеяние плоской волны на нити

Пусть на нити (цилиндре) радиусом R рассеивается плоская электромагнитная волна $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}}$ (\mathbf{e}_0 – единичный вектор поляризации). Будем считать, что цилиндр расположен в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_1 и μ_1 соответственно; диэлектрическую и магнитную проницаемость материала цилиндра обозначим ε_2 и μ_2 . Положим, что ось цилиндра ориентирована вдоль оси x прямоугольной декартовой системы координат (см. рисунок 3.2), а волновой вектор падающей волны зададим в виде $\mathbf{k}_1 = (k_{1x}, 0, k_{1z})$. Будем полагать, что радиус цилиндра R много меньше его длины L . Таким образом, при аналитических выкладках нить можно считать бесконечно длинной. В плоскости (z, y) введем также полярную систему координат (ρ, φ) с помощью соотношений $z = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

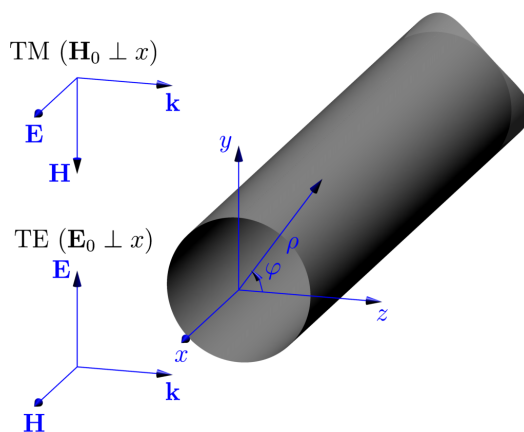


Рисунок 3.2. – Дифракция плоской электромагнитной волны на цилиндре

Необходимо рассматривать две возможных поляризации падающей волны:

- поперечно-электрическая (ТЕ) поляризация, при которой вектор напряженности электрического поля \mathbf{E}_0 перпендикулярен оси цилиндра ($E_{0x} = 0$). Далее по тексту будем обозначать относящиеся к этой поляризации величины индексом “ \perp ”;
- поперечно-магнитная (ТМ) поляризация, при которой вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H}_0 перпендикулярен оси цилиндра ($H_{0x} = 0$). Далее по тексту будем обозначать относящиеся к этой поляризации величины индексом “ \parallel ”, поскольку в этом случае у вектора \mathbf{E} есть ненулевая составляющая, параллельная оси цилиндра.

Если падающая волна ТМ-поляризована, то x -компонента поля \mathbf{E} может быть представлена в виде ряда по цилиндрическим функциям следующим образом [93, 99, 116]:

$$E_x = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_\rho \rho) e^{-in\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n a_n H_n(k_\rho \rho) e^{-in\varphi}, & \rho \geq R \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n J_n(k'_\rho \rho) e^{-in\varphi}, & \rho \leq R, \end{cases} \quad (3.1)$$

где J_n , H_n – цилиндрическая функция Бесселя порядка n и цилиндрическая функция Ганкеля 1-го рода порядка n соответственно, $\mathbf{k}_\rho = (k_{1y}, k_{1z})$, $k_\rho = |\mathbf{k}_\rho| = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 - k_{1x}^2}$, $k'_\rho = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 \mu_2 - k_{1x}^2}$, $k = \omega/c$. Для краткости в выражениях для поля (3.1), так же как и везде ниже, опущены множители $\frac{k_\rho}{k_1} e^{ik_{1x}x}$. Аналогично представляется и компонента магнитного поля H_x :

$$H_x = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n c_n H_n(k_\rho \rho) e^{-in\varphi}, & \rho \geq R \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n d_n J_n(k'_\rho \rho) e^{-in\varphi}, & \rho \leq R. \end{cases} \quad (3.2)$$

В случае ТЕ-поляризации для E_x следует использовать разложения (3.2), а для H_x – разложения (3.1). Остальные компоненты полей выражаются через E_x и H_x следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\perp \equiv (E_y, E_z) = \frac{ik_{1x}}{k_\rho^2} \vec{\nabla}_\perp E_x - \frac{ik\mu_1}{k_\rho^2} \mathbf{e}_x \times \vec{\nabla}_\perp H_x \\ \mathbf{H}_\perp \equiv (H_y, H_z) = \frac{ik_{1x}}{k_\rho^2} \vec{\nabla}_\perp H_x + \frac{ik\varepsilon_1}{k_\rho^2} \mathbf{e}_x \times \vec{\nabla}_\perp E_x, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\vec{\nabla}_\perp = \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, а $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ – орты соответствующих осей. Уравнения (3.3) справедливы при $\rho \geq R$; в случае $\rho < R$ в них следует сделать замены $k_\rho \rightarrow k'_\rho$, $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$, $\mu_1 \rightarrow \mu_2$. Неизвестные коэффициенты a_n , b_n , c_n и d_n находятся из граничных условий на поверхности цилиндра (при $\rho = R$).

Пусть выполняется условие $|k_{1x}| \ll k_\rho$. Тогда для коэффициентов a_n^\parallel и a_n^\perp (соответственно коэффициенты разложения электрического поля снаружи цилиндра в случае ТМ-поляризации (\parallel) и магнитного поля в случае ТЕ-поляризации (\perp)) можно получить следующие приближенные выражения (см. [99, 116]):

$$\begin{cases} a_n^\parallel \approx \frac{-J_n(k'_\rho R)J'_n(k_\rho R) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}J'_n(k'_\rho R)J_n(k_\rho R)}{J_n(k'_\rho R)H'_n(k_\rho R) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}J'_n(k'_\rho R)H_n(k_\rho R)}, \\ a_n^\perp \approx \frac{-J_n(k'_\rho R)J'_n(k_\rho R) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}J'_n(k'_\rho R)J_n(k_\rho R)}{J_n(k'_\rho R)H'_n(k_\rho R) - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}J'_n(k'_\rho R)H_n(k_\rho R)}, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, $\mu = \mu_2/\mu_1$. Формулы (3.4) являются точными для $n = 0$. Если $n \neq 0$, то эти формулы точны только когда $k_{1x} = 0$, а при малых k_{1x} они дают относительную погрешность порядка $\frac{|k_x|}{k_\rho}$.

Для нити из немагнитного металла, расположенной в вакууме, проницаемости μ и ε в (3.4) следует принять равными $\mu = 1$ и $\varepsilon = 1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, где σ – проводимость данного металла. Выпишем также выражения для коэффициентов a_n в случае идеально проводящих нитей, т.к. они имеют особенно простой вид. Поскольку при $\sigma \rightarrow \infty$ проницаемость $\varepsilon \rightarrow i\infty$, то из (3.4) находим [99]

$$\begin{cases} a_n^\parallel = -\frac{J_n(k_\rho R)}{H_n(k_\rho R)}, \\ a_n^\perp = -\frac{J'_n(k_\rho R)}{H'_n(k_\rho R)}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Обратим внимание, что если исходная плоская волна имеет ТМ(ТЕ)-поляризацию, то в случае идеально проводящего цилиндра и поле рассеяния также полностью ТМ(ТЕ)-поляризовано ($H_x = 0$ или $E_x = 0$ соответственно). В общем же случае произвольного ε материала цилиндра это не так. Например, если на цилиндр падает ТМ-поляризованная волна (т.е. в падающей волне $H_{x,inc} = 0$), то в разложении для поля рассеяния $H_{x,sc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n c_n^\parallel H_n(k_\rho \rho) e^{-in\varphi}$ коэффициенты c_n^\parallel вообще говоря не равны 0 (за исключением коэффициента c_0^\parallel). Таким образом, в приведенном примере при воздействии ТМ-поляризованной волны на цилиндр рассеянная волна

содержит компоненты с ТМ- и ТЕ-поляризацией, амплитуды которых определяются соответственно коэффициентами a_n^{\parallel} и c_n^{\parallel} . Можно однако показать, что в рассматриваемом случае при $|k_{1x}| \ll k_{\rho}$ амплитуды $|c_n| \ll |a_n|$, и, таким образом, ими можно пренебречь.

Пользуясь асимптотическими выражениями для функций Ганкеля большого аргумента, и интегральным представлением функций Ганкеля [67, 114], волну, рассеянную цилиндром при $k_{\rho} \gg 1$ можно представить в виде

$$\Psi = \begin{Bmatrix} E_x \\ H_x \end{Bmatrix} = e^{ik_{\rho}\rho} + \begin{Bmatrix} f^{\parallel}(\varphi) \\ f^{\perp}(\varphi) \end{Bmatrix} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+x^2}}}{\sqrt{\rho^2+x^2}} dx, \quad (3.6)$$

где

$$f^{\parallel(\perp)}(\varphi) = -\frac{i}{\pi} \left(a_0^{\parallel(\perp)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\parallel(\perp)} \cos(n\varphi) \right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\parallel(\perp)} \cos(n\varphi), \quad (3.7)$$

где при $n \neq 0$ $f_n^{\parallel(\perp)} = -2ia_n^{\parallel(\perp)}/\pi$, а $f_0^{\parallel(\perp)} = -ia_0^{\parallel(\perp)}/\pi$. Остальные неизвестные компоненты полей находятся через E_x (H_x) из уравнений (3.3). По аналогии с трёхмерным случаем $f(\varphi)$ следует понимать как амплитуду рассеяния электромагнитной волны на металлической нити на угол φ [69]. Отметим, что вместо расходящейся сферической волны, характеризующей рассеяние в трёхмерном случае, в двумерном случае образуется расходящаяся цилиндрическая волна. Кроме того, видно, что в двумерном случае амплитуда рассеяния является безразмерной, в то время как в трёхмерном случае она имеет размерность длины.

Рассматривая предельные выражения для функций Бесселя и Ганкеля малого аргумента, можно найти, что в случае идеально проводящего цилиндра при $k_{\rho}R \ll 1$ имеют место соотношения $a_0^{\perp} \approx -a_{\pm 1}^{\perp}$; и $|a_0^{\perp}| \gg |a_n^{\perp}|$ для всех $|n| > 1$. Если цилиндр не является идеальным проводником, то первое равенство нарушается, но коэффициенты a_0^{\perp} и $a_{\pm 1}^{\perp}$ по прежнему остаются сравнимыми по абсолютной величине. Если же цилиндр диэлектрический с проницаемостью $\varepsilon - 1 \sim 1$, то $|a_0^{\perp}| \ll |a_{\pm 1}^{\perp}|$. Для ТМ-поляризованной волны при $k_{\rho}R \ll 1$ для коэффициентов a_n^{\parallel} справедливо соотношение $|a_0^{\parallel}| \gg |a_n^{\parallel}|$ для всех $n \neq 0$. Таким образом, при $k_{\rho}R \ll 1$ в рядах (3.1) необходимо учитывать члены с $n = 0$ и $n = \pm 1$; при этом рассеяние электромагнитной волны с ТЕ-поляризацией на нити анизотропно, тогда как рассеяние ТМ-поляризованной волны изотропно.

Учётом первых двух членов ($n = 0$ и $n = \pm 1$) разложения (3.1) можно ограничиться не только при $k_{\rho}R \ll 1$, но и в более широком диапазоне

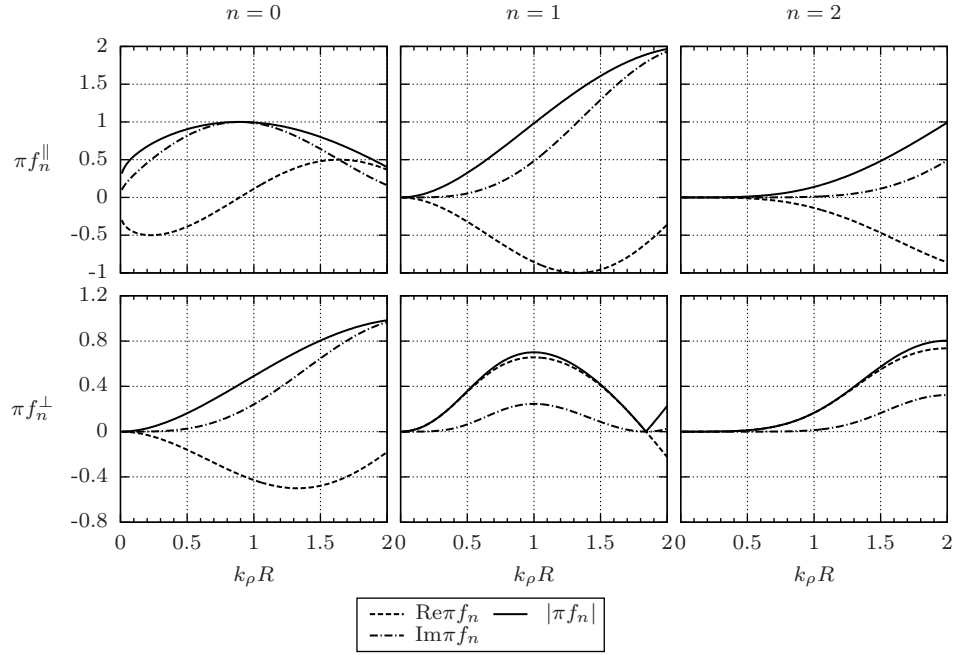


Рисунок 3.3. – Зависимости амплитуд рассеяния f_0 , f_1 и f_2 электромагнитной волны на вольфрамовой нити от $k_\rho R$ для двух поляризаций (частота 1 ТГц)

$0 < k_\rho R \lesssim 1$. На рисунке 3.3 для примера приведены зависимости коэффициентов разложения амплитуд рассеяния f_n на вольфрамовом цилиндре от величины $k_\rho R$ на частоте 1 ТГц. Видно, что в диапазоне $0 < k_\rho R \lesssim 0.5$ члены разложения (3.7) с $n = 2$ пренебрежимо малы, и лишь при $k_\rho R > 0.5$ начинают заметно расти, составляя при $k_\rho R \sim 1$ не более 30% от нулевого и первого членов (для других материалов нитей ситуация принципиально не меняется).

С учетом всего вышесказанного, выражение для волны, рассеянной цилиндром, ось которого проходит через точку $\boldsymbol{\rho}_1 = (y_1, z_1)$, может быть записано в виде

$$\Psi = e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}} + e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} \cdot i\pi f_0 H_0(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) - e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} \cdot \pi f_1 H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cos(\mathbf{k}_\rho, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1), \quad (3.8)$$

где для простоты верхний индекс у амплитуды рассеяния опущен. В случае, когда $k_\rho R \gtrsim 1$, в разложении амплитуды рассеяния (3.7) необходимо учитывать большее число членов ($n = 0, 1, 2, \dots$), и выражение для рассеянной нитью волны существенно усложняется. При дальнейшем изложении мы ограничимся случаем, когда $0 < k_\rho R \lesssim 1$ и будем считать, что рассеяние плоской волны на одиночном цилиндре может быть описано выражением (3.8).

3.1.2 Рассеяние цилиндрической волны на нити

Пусть теперь на этот же рассеиватель, расположенный в точке $\boldsymbol{\rho}_1$, падает цилиндрическая волна, расходящаяся из начала координат $\Psi_0 = H_0(k_\rho \rho)$. Для анализа рассеяния такой волны её можно разложить на элементарные плоские волны, которые рассеиваются по известному закону (3.8). Для функции Ганкеля, в частности, может быть использовано следующее представление

$$H_0(k_\rho \rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_y^2}} dk_y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_z^2}} dk_z. \quad (3.9)$$

Для наших целей, впрочем, знать точное разложение не обязательно; достаточно того, что волна $\Psi_0 = H_0(k_\rho \rho)$ может быть представлена в виде суммы плоских волн следующим образом: $H_0(k_\rho \rho) = \int \phi(k_\rho, k_y) e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}} dk_y$ либо $H_0(k_\rho \rho) = \int \phi(k_\rho, k_z) e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}} dk_z$, где $k_\rho \equiv |\mathbf{k}_\rho| = \text{const}$, а $\phi(k_\rho, k_y)$ – некоторая функция.

Итак, разлагая исходную волну на сумму плоских волн, и учитывая (3.8), можно записать следующее выражение для рассеянной волны¹⁾

$$\begin{aligned} \Psi_{sc} = & \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_\rho, k_y) e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} f_0 i \pi H_0(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) dk_y - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_\rho, k_y) e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} f_1 \pi H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cos(\mathbf{k}_\rho, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1) dk_y. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поскольку $f_{0,1}$ и $H_{0,1}(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|)$ зависят только от модуля волнового вектора k_ρ и не зависят от k_y , их можно вынести из-под знака интегрирования. Тогда в соответствии с (3.9) первый интеграл в (3.10) будет равен $H_0(k_\rho \rho_1)$, и (3.10) запишется в виде

$$\Psi_{sc} = H_0(k_\rho \rho_1) \cdot f_0 i \pi H_0(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) - f_1 \pi H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cdot I_1, \quad (3.11)$$

¹⁾ В выражении (3.10) $e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} \equiv e^{i\sqrt{k_\rho^2 - k_y^2} z_1 + i k_y y_1}$; при $k_y > k_\rho$ эта величина представляет собой затухающую плоскую волну с волновым числом k_y , а не k_ρ . При больших значениях k_y ($k_y R \gg 1$) коэффициенты a_n , $|n| > 1$ для такой волны станут сравнимы с a_0 , a_1 (см. (3.4)). Таким образом, при интегрировании в области больших k_y к (3.10) следовало бы добавить слагаемые вида

$$H_n(k_y |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \times \int_{|k_y R| \gg 1} \frac{e^{-\sqrt{k_y^2 - k_\rho^2} z_1} e^{i k_y y_1}}{i \sqrt{k_y^2 - k_\rho^2}} a_n(k_y) \cos(n\alpha) dk_y,$$

где α – угол между векторами \mathbf{k}_ρ и $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1$. Простые оценки, однако, показывают, что абсолютные значения этих интегралов малы ($\sim e^{-k_y^{\min} x_1} \ll 1$) и соответствующими добавками можно пренебречь.

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_\rho, k_y) e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} \cos(\mathbf{k}_\rho, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1) dk_y. \quad (3.12)$$

Для вычисления интеграла I_1 представим косинус угла между векторами \mathbf{k}_ρ и $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1$ в виде $\cos(\mathbf{k}_\rho, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1) = \frac{\mathbf{k}_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1)}{k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|}$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1}{k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}_\rho \phi(k_\rho, k_y) e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} dk_y = \\ &= -i \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1}{k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|} \cdot \text{grad}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_\rho, k_y) e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}_1} dk_y = -i \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1}{k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|} \cdot \text{grad}_1 H_0(k_\rho \rho_1), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где индекс “1” у знака градиента означает, что дифференцирование проводится по координатам точки $\boldsymbol{\rho}_1$ ($\text{grad}_1 \equiv \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z_1} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y_1}$). После дифференцирования получаем $\text{grad}_1 H_0(k_\rho \rho_1) = -H_1(k_\rho \rho_1) \frac{k_\rho \boldsymbol{\rho}_1}{\rho_1}$, и далее

$$I_1 = i H_1(k_\rho \rho_1) \frac{\boldsymbol{\rho}_1 (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1)}{\rho_1 |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|} = i H_1(k_\rho \rho_1) \cos(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1). \quad (3.14)$$

Обобщая вышеизложенное, получаем, что суммарное волновое поле при рассеянии цилиндрической волны будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi &= H_0(k_\rho \rho) + f_0 i \pi H_0(k_\rho \rho_1) \cdot H_0(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) - \\ &\quad - f_1 i \pi H_1(k_\rho \rho_1) \cdot H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cos(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если рассеиватель расположен на большом расстоянии от начала координат ($k_\rho \rho_1 \gg 1$), то воздействующая на него цилиндрическая волна почти не отличается от плоской волны (с амплитудой $H_0(k_\rho \rho_1)$), и рассеиваться должна таким же образом. Для проверки правильно ли описывает выражение (3.15) рассеяние в этом случае, мы можем воспользоваться разложением $i H_1(z) \approx H_0(z) \left(1 + \frac{i}{4z}\right)$, справедливым при $z \gg 1$ [114]. Подставляя это выражение в (3.15), получим

$$\begin{aligned} \Psi &= H_0(k_\rho \rho) + f_0 i \pi H_0(k_\rho \rho_1) \cdot H_0(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) - \\ &\quad - f_1 \pi H_0(k_\rho \rho_1) \left(1 + \frac{i}{4k_\rho \rho_1}\right) \cdot H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cos(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Сравнивая это выражение с (3.8), можно сделать вывод, что по мере увеличения расстояния от центра координат (центра расходящейся цилиндрической

волны) до рассеивателя амплитуда рассеяния цилиндрической волны на нити все меньше отличается от амплитуды рассеяния плоской волны, как этого и следовало ожидать.

Рассмотрим также кратко случай, когда исходная цилиндрическая волна имеет вид $\Psi_0 = H_1(k_\rho \rho) \cos \varphi$. Все выкладки будут аналогичны приведённым выше, за исключением выражения для интеграла I_1 . Теперь он будет равен

$$I'_1 = -i \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1}{k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|} \cdot \text{grad}_1 H_1(k_\rho \rho_1) \cos \varphi_1. \quad (3.17)$$

Дифференцирование на этот раз приводит к выражению

$$\text{grad}_1 H_1(k_\rho \rho_1) \cos \varphi_1 = \left\{ k_\rho H_0(k_\rho \rho_1) - \frac{2}{\rho_1} H_1(k_\rho \rho_1) \right\} \cos \varphi_1 \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1} H_1(k_\rho \rho_1) \mathbf{e}_z. \quad (3.18)$$

Тогда выражение для рассеянной волны будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_0 + \Psi_{sc} = & H_1(k_\rho \rho) \cos \varphi + \{f_0 H_1(k_\rho \rho_1) \cos \varphi_1\} i\pi H_0(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) - \\ & - \left\{ f_1 \cos \varphi_1 \left(-i H_0(k_\rho \rho_1) + \frac{2i}{k_\rho \rho_1} H_1(k_\rho \rho_1) \right) \right\} \pi H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cos(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1) - \\ & - \left\{ \frac{-if_1}{k_\rho \rho_1} H_1(k_\rho \rho_1) \right\} \pi H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cos(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{e}_z). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Интересен частный случай, когда рассеиватель расположен на оси y , т.е. $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$. В этом случае имеем $\cos \varphi_1 = 0$ и выражение для рассеянной волны существенно упрощается

$$\Psi_{sc} = \frac{i\pi f_1}{k_\rho \rho_1} H_1(k_\rho \rho_1) H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|) \cos(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{e}_z). \quad (3.20)$$

Обратим внимание, что рассеянная волна при этом не обращается в ноль, несмотря на то, что, казалось бы, амплитуда падающей волны в точке расположения рассеивателя равна нулю $\Psi_0(\boldsymbol{\rho}_1) = H_1(k_\rho \rho_1) \cos \varphi_1 = 0$. На самом деле здесь нет никакого парадокса: для волны с перпендикулярной поляризацией при $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ нулю равен только вектор напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \Psi_0 \mathbf{e}_x$, вектор же электрического поля имеет вид $\mathbf{E}_0 = \frac{ic}{\omega} \text{rot } \mathbf{H}_0 = -\frac{ic}{\omega \rho_1} H_1(k_\rho \rho_1) \mathbf{e}_y$, т.е. не равен нулю. Таким образом, при $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ на нити рассеивается электрическая компонента исходной волны.

3.2 Рассеяние электромагнитной волны на одномерной решетке

Рассмотрим теперь рассеяние плоской волны на одномерной решетке (кристаллической плоскости), образованной периодически расположенными

параллельными нитями (рисунок 3.4). Пусть координаты осей нитей $y_n = bn$,

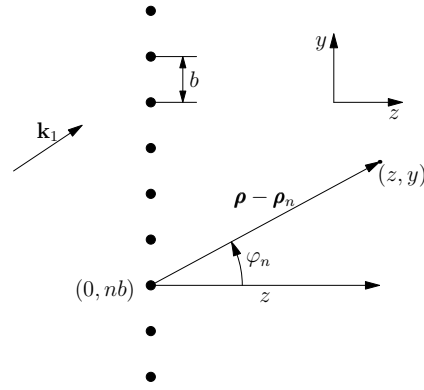


Рисунок 3.4. – Рассеяние плоской волны на одномерной решётке из металлических нитей

$z_n = 0$, b – период решетки, а волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_y, k_z)$ (индекс “1” у компонент вектора опускаем). Общее решение для волны, рассеянной решёткой, имеет следующий вид

$$\Psi = e^{i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}} + i\pi F_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_y bn} H_0(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|) - \pi F_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_y bn} H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|) \cos \varphi_n - \pi F'_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_y bn} H_1(k_\rho |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|) \sin \varphi_n, \quad (3.21)$$

где суммирование проводится по координатам $\boldsymbol{\rho}_n$ всех нитей, а амплитуды F_0 , F_1 и F'_1 не зависят от положения нити в решетке (индекса n), поскольку решётка предполагается бесконечной.

Цилиндрическая волна с амплитудой $F(\varphi_n) = e^{ik_y bn} (F_0 + F_1 \cos \varphi_n + F'_1 \sin \varphi_n)$, расходящаяся от n -й нити, образуется за счет рассеяния на этой нити двух волн: 1) исходной плоской волны и 2) суммы цилиндрических волн (с амплитудами $F(\varphi_m)$, $m \neq n$), приходящих от всех остальных нитей. Рассеяние исходной плоской волны на нити описывается выражением (3.8); для описания рассеяния цилиндрических волн можно использовать (3.15) и (3.20) [3–А].

Рассмотрим сначала кратко наиболее простой случай, когда исходная волна падает на решетку нормально, т.е. $k_x = k_y = 0$ и, соответственно, $k_\rho = k_z = k_1$. В этом случае с помощью формул (3.15) и (3.20) можно установить, что амплитуда рассеяния на каждой нити в присутствии остальных $F(\varphi_n)$ будет иметь такую же угловую зависимость как и амплитуда рассеяния на одиночной нити $f(\varphi)$: $F(\varphi_n) = F_0 + F_1 \cos \varphi_n$, т.е. $F'_1 = 0$. Система уравнений для нахождения F_0 и F_1 имеет следующий вид (использованы вы-

ражения (3.15) и (3.20))

$$F_0 = f_0 + f_0 F_0 \sum_{m \neq 0} i\pi H_0(k_1 b |m|), \quad (3.22)$$

$$F_1 = f_1 + f_1 F_1 \sum_{m \neq 0} i\pi H_1(k_1 b |m|) \cdot (k_1 b |m|)^{-1}. \quad (3.23)$$

Второе слагаемое в правой части формул (3.22)-(3.23) учитывает рассеяние на отдельной нити цилиндрических волн, приходящих от всех остальных нитей в решетке.

Вычисление суммы в уравнении (3.22) даёт [117]

$$S_1 = \sum_{n \neq 0} H_0(k_1 b |n|) = \frac{2}{k_1 b} - 1 - i \frac{2}{\pi} \left(C + \log \frac{k_1 b}{4\pi} \right) - \frac{2i}{b} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi n/b)^2 - k_1^2}} - \frac{b}{2\pi |n|} \right), \quad (3.24)$$

где $C \approx 0.5772$ – постоянная Эйлера. Сумму, входящую в уравнение (3.23) можно вычислить, воспользовавшись известным значением первой суммы (3.24) и следующим равенством для функций Ганкеля

$$\frac{H_1(k_1 b |n|)}{k_1 b |n|} = -\frac{2i}{\pi k_1^2 b^2 n^2} + \frac{1}{k_1^2} \int_0^{k_1} k_1 H_0(k_1 b |n|) dk_1.$$

После интегрирования получаем

$$S_2 = \sum_{n \neq 0} \frac{H_1(k_1 b |n|)}{k_1 b |n|} = \frac{2}{k_1 b} - \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \left(C - \frac{1}{2} + \log \frac{k_1 b}{4\pi} + \frac{2\pi^2}{3k_1^2 b^2} \right) - \frac{2i}{k_1^2 b} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{2\pi |n|}{b} - \frac{k_1^2 b}{4\pi |n|} - \sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{b^2} - k_1^2} \right). \quad (3.25)$$

Пусть например $|\pi f_0|, |\pi f_1| \ll 1$; тогда с помощью уравнений (3.24) и (3.25) можно получить следующие выражения для амплитуд F_0 и F_1 ²⁾

$$F_0 = \frac{f_0}{1 - i\pi S_1 f_0} \simeq \frac{f_0}{1 + i\pi f_0 - i \frac{2\pi}{k_1 b} f_0}, \quad (3.26)$$

$$F_1 = \frac{f_1}{1 - i\pi S_2 f_1} \simeq \frac{f_1}{1 + i \frac{\pi}{2} f_1 - i \frac{2\pi}{k_1 b} f_1}. \quad (3.27)$$

²⁾Для упрощения получающихся выражений при записи (3.26)-(3.27) сделано предположение $k_1 b < 2\pi$. Путём несложных, но достаточно громоздких вычислений (последовательно рассматривая случаи $2\pi < k_1 b < 4\pi$, $4\pi < k_1 b < 6\pi$ и т.д.) можно показать, что это предположение не влияет на конечный результат для показателя преломления, и он остаётся справедливым и для больших значений k_1 (вдали от условий дифракции Брегга).

Таким образом, рассеянная волна в точке с координатами (z, y) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi(z, y) = e^{ik_1 z} + F_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\pi H_0 \left(k_1 \sqrt{(y - nb)^2 + z^2} \right) + \\ + F_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\pi) \cdot H_1 \left(k_1 \sqrt{(y - nb)^2 + z^2} \right) \cos \varphi_n, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$\cos \varphi_n = \frac{z}{\sqrt{(y - nb)^2 + z^2}}. \quad (3.29)$$

Суммирование этих рядов произведено в работе [1–А]; окончательно при достаточно больших расстояниях от решётки $|z|$ ($|z| \gtrsim \frac{b}{2\pi\sqrt{1-(k_1 b/2\pi)^2}}$) имеем

$$\Psi = e^{ik_1 z} + \frac{2i\pi}{k_1 b} (F_0 \pm F_1) e^{ik_1 |z|}, \quad (3.30)$$

где знак “+” соответствует случаю $z > 0$, знак “–” — случаю $z < 0$.

Полученное выражение по виду полностью соответствует результату (2.35), полученному для трёхмерного случая. Повторяя далее рассуждения, приведенные в главе 2, можно прийти к дисперсионному уравнению для кристалла (2.39), где величины F_0 и F_1 выражаются формулами (3.26)–(3.27). Пусть $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$; тогда решение этого уравнения даёт для показателя преломления волны в кристалле следующее выражение [3–А]

$$n^2 \equiv \frac{q^2}{k^2} \simeq 1 + \frac{4\pi}{k^2 \Omega_2} \cdot \left\{ \frac{f_0}{1 + i\pi f_0} + \frac{f_1}{1 + i\frac{\pi}{2} f_1} \right\}, \quad (3.31)$$

где $\Omega_2 = ab$, и предполагается, что $|n^2 - 1| \ll 1$, $|\pi f(\varphi)| \ll 1$.

Перейдем теперь к более общему случаю, когда исходная волна падает на решетку под произвольным углом. Составляя систему линейных алгебраических уравнений для величин F_0 , F_1 , и F'_1 , можно найти

$$\begin{cases} F_0 = F_0(k_y, k_\rho) = f_0 \frac{1 + f_1(S_3 + S_2 k_y/k_\rho - S_1)}{1 - S_1 f_0 - (S_1 - S_3) f_1 - f_0 f_1 (S_1 S_3 + S_2^2 - S_1^2)}, \\ F_1 = F_1(k_y, k_\rho) = f_1 \frac{k_z/k_\rho}{1 - f_1 S_3}, \\ F'_1 = F'_1(k_y, k_\rho) = f_1 \frac{k_y/k_\rho + f_0(S_2 - S_1 k_y/k_\rho)}{1 - S_1 f_0 - (S_1 - S_3) f_1 - f_0 f_1 (S_1 S_3 + S_2^2 - S_1^2)}, \end{cases} \quad (3.32)$$

где величины S_1 , S_2 и S_3 равны

$$S_1 = i\pi \sum_{n=1}^{\infty} H_0(k_\rho bn) (e^{ik_y bn} + e^{-ik_y bn}) = \frac{2i\pi}{k_{z0}b} - i\pi + 2 \left(\log \frac{k_\rho b}{4\pi} + C \right) + \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{2i\pi}{k_{zn}b} - \frac{1}{|n|} \right\}, \quad (3.33)$$

$$S_2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} H_1(k_\rho bn) (e^{ik_y bn} - e^{-ik_y bn}) = -2 \frac{k_y}{k_\rho} + \frac{i\pi}{k_\rho b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k_{y,-n}}{k_{z,-n}} + \frac{k_{yn}}{k_{zn}} \right\}, \quad (3.34)$$

$$S_3 = i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_1(k_\rho bn)}{k_\rho bn} (e^{ik_y bn} + e^{-ik_y bn}) = \frac{2i\pi}{k_\rho b} \frac{k_{z0}}{k_\rho} - \frac{i\pi}{2} + \log \frac{k_\rho b}{4\pi} + C - \frac{1}{2} + \frac{k_y^2}{k_\rho^2} + \frac{2\pi^2}{3k_\rho^2 b^2} + \frac{2\pi}{k_\rho b} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{ik_{zn}}{k_\rho} + \frac{|k_{yn}|}{k_\rho} - \frac{k_\rho b}{4\pi|n|} \right\}. \quad (3.35)$$

В приведенных формулах $C \approx 0.5772$ – постоянная Эйлера, $k_{yn} = k_y - 2\pi n/b$, $k_{zn} = \sqrt{k_\rho^2 - k_{yn}^2}$, причем корень берется в арифметическом смысле, а в случае, если подкоренное выражение отрицательно, следует считать $\sqrt{-|\{\dots\}|} = +i\sqrt{|\{\dots\}|}$. Обратим внимание, что при нормальном падении ($k_x = 0$, $k_y = 0$) выражения (3.32) переходят в решения, полученные нами ранее; кроме того, при выполнении условия $k_y b = \pi n$ выражения существенно упрощаются, т.к. в этом случае $S_2 = 0$.

Сосредоточимся далее для краткости на анализе рассеяния волны с ТМ-поляризацией, поскольку рассмотрение ТЕ-поляризованной волны полностью аналогично. Преобразуя суммы в (3.21) с помощью правила Пуассона, и проводя дифференцирование в (3.3), получим следующие выражения для компонент электрического поля \mathbf{E} при рассеянии плоской ТМ-поляризованной волны *единичной* амплитуды на одномерной решетке:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{k_\rho}{k_1} e^{ik_\rho \rho} + \frac{k_\rho}{k_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(F_0 + F_1 \frac{k_{zn}}{k_\rho} \operatorname{sgn} z + F_1' \frac{k_{yn}}{k_\rho} \right) \frac{2i\pi}{k_{zn}b} e^{ik_{yn}y} e^{ik_{zn}|z|}, \\ E_y &= -\frac{k_x}{k_1} \frac{k_y}{k_\rho} e^{ik_\rho \rho} - \frac{k_x}{k_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(F_0 + F_1 \frac{k_{zn}}{k_\rho} \operatorname{sgn} z + F_1' \frac{k_{yn}}{k_\rho} \right) \frac{2i\pi}{k_{zn}b} \frac{k_{yn}}{k_\rho} \times \\ &\quad \times e^{ik_{yn}y} e^{ik_{zn}|z|}, \\ E_z &= -\frac{k_x}{k_1} \frac{k_z}{k_\rho} e^{ik_\rho \rho} - \frac{k_x}{k_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(F_0 + F_1 \frac{k_{zn}}{k_\rho} \operatorname{sgn} z + F_1' \frac{k_{yn}}{k_\rho} \right) \frac{2i\pi}{k_{zn}b} \frac{k_{zn}}{k_\rho} \times \\ &\quad \times e^{ik_{yn}y} e^{ik_{zn}|z|} \operatorname{sgn} z. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для того, чтобы лучше понять физический смысл выражений (3.36), их можно представить в следующем, более простом и компактном виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_n^{\pm} \Phi_n^{\pm} e^{i\mathbf{k}_n^{\pm} \mathbf{r}}, \quad (3.37)$$

где \mathbf{e}_0 – единичный вектор поляризации падающей на решетку волны, $\mathbf{e}_n^{\pm} = \frac{k_{\rho}}{k_1} \mathbf{e}_x - \frac{k_x k_{yn}}{k_1 k_{\rho}} \mathbf{e}_y \mp \frac{k_x k_{zn}}{k_1 k_{\rho}} \mathbf{e}_z$ – единичные векторы поляризации расходящихся от решетки (рассеянных) волн, $\mathbf{k}_n^{\pm} = (k_x, k_{yn}, \pm k_{zn})$ – их волновые вектора, а Φ_n^{\pm} – их амплитуды:

$$\begin{cases} \Phi_n^+ = \frac{2i\pi}{k_{zn}b} \left(F_0 + F_1 \frac{k_{zn}}{k_{\rho}} + F_1' \frac{k_{yn}}{k_{\rho}} \right) = \frac{2i\pi}{k_{zn}b} F(\phi_n), \\ \Phi_n^- = \frac{2i\pi}{k_{zn}b} \left(F_0 - F_1 \frac{k_{zn}}{k_{\rho}} + F_1' \frac{k_{yn}}{k_{\rho}} \right) = \frac{2i\pi}{k_{zn}b} F(\pi - \phi_n), \end{cases} \quad (3.38)$$

где $F(\varphi) = F_0 + F_1 \cos \varphi + F_1' \sin \varphi$ – эффективная амплитуда рассеяния волны нитью в решетке, $\sin \phi_n = \frac{k_{yn}}{k_{\rho}}$, $\cos \phi_n = \frac{k_{zn}}{k_{\rho}}$. Знак “+” в выражениях (3.37)-(3.38) соответствует случаю $z > 0$, знак “-” – случаю $z < 0$.

Формула (3.37) отражает следующий физический факт: в результате дифракции плоской волны единичной амплитуды на одномерной периодической решетке в общем случае возникает некоторый набор расходящихся от решетки плоских волн, имеющих амплитуды Φ_n^{\pm} . При этом, как это следует из выражения для \mathbf{k}_n^{\pm} , y -компоненты волновых векторов рассеянных волн отличаются на вектор обратной решётки $\tau_y = \frac{2\pi n}{b}$. Необходимо отметить, что в случае хаотического расположения нитей в плоскости $z = 0$ (в противовес рассмотренному периодическому расположению), в результате рассеяния возникало бы только 2 плоских волны – прошедшая через слой нитей (с волновым вектором $\mathbf{k}_0^+ \equiv \mathbf{k}_1 = (k_x, k_y, k_z)$) и зеркально отраженная от него (с волновым вектором $\mathbf{k}_0^- = (k_x, k_y, -k_z)$).

Заметим, что при $|k_{yn}| > k_{\rho}$ волна с индексом n в (3.37) является затухающей, так что на больших расстояниях от решетки (при достаточно больших $|z|$) суммирование в (3.37) следует ограничить только теми значениями n , при которых $|k_{yn}| < k_{\rho}$. Однако при анализе распространения волн в двумерном кристалле из нитей учет затухающих волн может быть важен, особенно если период кристалла по z недостаточно велик, так что ниже в данной главе мы использовали полные выражения для поля (3.36)-(3.37).

3.3 Дифракция и преломление в кристалле

Пусть теперь плоская ТМ-поляризованная волна рассеивается не на одной, а на двух решетках, расположенных на расстоянии a друг от друга в среде с проницаемостями ε_1 и μ_1 (рисунок 3.5). Общее решение задачи будет иметь аналогичный (3.36)-(3.37) вид, т.е., например, для E_x -компоненты поля \mathbf{E} можно записать

$$E_x = \frac{k_\rho}{k_1} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} + \frac{k_\rho}{k_1} \sum_n \Phi_{n1}^\pm e^{i\mathbf{k}_n^\pm (\mathbf{r}-\mathbf{z}_1)} + \frac{k_\rho}{k_1} \sum_n \Phi_{n2}^\pm e^{i\mathbf{k}_n^\pm (\mathbf{r}-\mathbf{z}_2)}, \quad (3.39)$$

где $\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{z}_2 = a\mathbf{e}_z$ — векторы, задающие положение первой и второй решетки соответственно; знак “+” или “−” в первой сумме выбирается в соответствии со знаком z , во второй сумме — в соответствии со знаком разности $(z - a)$. Остальные компоненты поля, как и ранее, могут быть выражены через E_x с помощью уравнений (3.3).

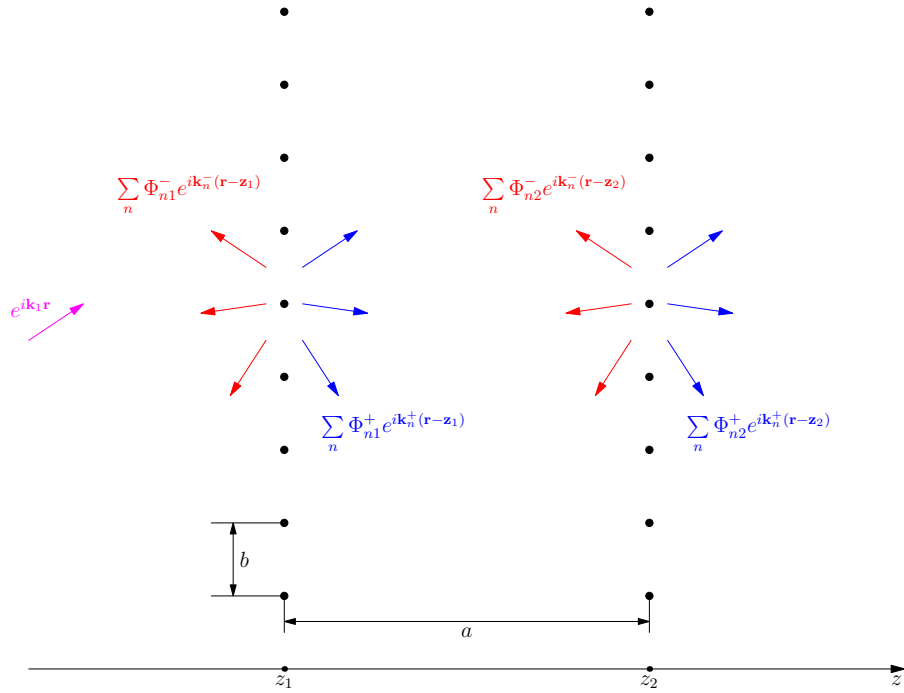


Рисунок 3.5. – Рассеяние плоской волны двумя одномерными решетками

Неизвестные амплитуды Φ_{n1}^\pm и Φ_{n2}^\pm можно выразить через амплитуды Φ_n^\pm , рассчитанные для случая рассеяния на одной решетке. Для этого необходимо заметить, что на каждой из решеток помимо исходной плоской волны $E_{x0} \equiv \Psi_0 = \frac{k_\rho}{k_1} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}}$ рассеиваются также волны, приходящие от другой решетки (см. рисунок 3.5). Так, например, на первой решетке рассеивается волна $\Psi_0 + \Psi_2$, где

$$\Psi_2 = \frac{k_\rho}{k_1} \sum_n \Phi_{n2}^- e^{i\mathbf{k}_n^- (\mathbf{r}-\mathbf{z}_2)}.$$

В результате такого рассеяния образуется следующий набор расходящихся от первой решетки плоских волн:

$$\Psi_1^{sc} = \frac{k_\rho}{k_1} \sum_n \Phi_{n1}^\pm e^{i\mathbf{k}_n^\pm(\mathbf{r}-\mathbf{z}_1)}.$$

Аналогичным образом, на вторую решетку воздействует волна $\Psi_0 + \Psi_1$, где

$$\Psi_1 = \frac{k_\rho}{k_1} \sum_n \Phi_{n1}^+ e^{i\mathbf{k}_n^+(\mathbf{r}-\mathbf{z}_1)},$$

в результате чего возникает рассеянная волна

$$\Psi_2^{sc} = \frac{k_\rho}{k_1} \sum_n \Phi_{n2}^\pm e^{i\mathbf{k}_n^\pm(\mathbf{r}-\mathbf{z}_2)}.$$

Зная закон, по которому происходит рассеяние плоской волны единичной амплитуды на отдельной решетке (см. формулы (3.37)–(3.38)), можно составить систему линейных алгебраических уравнений для нахождения Φ_{n1} и Φ_{n2} .

Приведем простой пример для случая нормального падения волны на решетку, когда $\mathbf{k}_1 = (0, 0, k_1)$ и $k_\rho = k_1$. Пусть для волнового числа выполняется условие $k_1 b < 2\pi$; тогда в (3.37) все волны с $|n| > 0$ будут затухающими, и если расстояние между решетками a достаточно велико, ими можно пренебречь. Тогда, учитывая, что при нормальном падении $F_1' = 0$ и $\Phi_0^\pm = \frac{2i\pi}{k_1 b}(F_0 \pm F_1)$, из выражений (3.37)–(3.38) получим для рассеяния на одной решетке, расположенной при $z = z_0$

$$E_x \approx e^{ik_1 z} + \frac{2i\pi}{k_1 b} (F_0 + F_1 \operatorname{sgn}(z - z_0)) e^{ik_1 |z - z_0|}. \quad (3.40)$$

В случае рассеяния на двух решетках $\Phi_{0m}^\pm = \frac{2i\pi}{k_1 b}(F_{0m} \pm F_{1m})$, где $m = 1, 2$; $\Psi_0(z) = e^{ik_1 z}$, а предыдущие формулы для Ψ_1, Ψ_2 принимают вид

$$\Psi_1(z) = \frac{2i\pi}{k_1 b} (F_{01} + F_{11}) e^{ik_1 |z - z_1|}, \quad \Psi_2(z) = \frac{2i\pi}{k_1 b} (F_{02} - F_{12}) e^{ik_1 |z - z_2|}. \quad (3.41)$$

Искомая система уравнений запишется тогда следующим образом:

$$\begin{cases} F_{01} = F_0 \cdot [\Psi_0(z_1) + \Psi_2(z_1)], \\ F_{11} = F_1 \cdot [\Psi_0(z_1) - \Psi_2(z_1)], \\ F_{02} = F_0 \cdot [\Psi_0(z_2) + \Psi_1(z_2)], \\ F_{12} = F_1 \cdot [\Psi_0(z_2) + \Psi_1(z_2)]. \end{cases} \quad (3.42)$$

Знак “–” перед вторым слагаемым во втором уравнении полученной системы связан с тем, что волна $\Psi_2(z)$ падает на первую решетку со стороны положительных значений z (направление её распространения противоположно направлению распространения волны Ψ_0).

Учет затухающих волн, а также обобщение полученных результатов на случай произвольного (не нормального) падения исходной волны на решётки сопровождаются громоздкими арифметическими преобразованиями, но никаких принципиальных затруднений не вызывают. То же самое можно сказать и о случае, когда решёток не две, а несколько (M). Общее решение для поля E_x при этом будет иметь следующий вид

$$E_x = \frac{k_\rho}{k_1} e^{ik_\rho \rho} + \frac{k_\rho}{k_1} \sum_{n,m} \left(F_{0m} + F_{1m} \frac{k_{zn}}{k_\rho} \operatorname{sgn}(z - z_m) + F'_{1m} \frac{k_{yn}}{k_\rho} \right) \frac{2i\pi}{k_{zn} b} \times \quad (3.43)$$

$$\times e^{ik_{yn} y} e^{ik_{zn} |z - z_m|},$$

где $z_m = (m - 1)a$, суммирование по m проводится от 1 до M (т.е. по всем решёткам), а величины F_{0m} , F_{1m} и F'_{1m} находятся из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{F_{0m}}{F_0} &= e^{ik_z z_m} + \sum_{n \neq m} \sum_l e^{ik_{zl} |z_m - z_n|} \frac{F_0(k_{yl})}{F_0(k_{y0})} \frac{2i\pi}{k_{zl} b} \times \\ &\quad \times \left(F_{0n} + F_{1n} \frac{k_{zl}}{k_\rho} \operatorname{sgn}(m - n) + F'_{1n} \frac{k_{yl}}{k_\rho} \right), \\ \frac{F_{1m}}{F_1} &= e^{ik_z z_m} + \sum_{n \neq m} \sum_l e^{ik_{zl} |z_m - z_n|} \frac{F_1(k_{yl})}{F_1(k_{y0})} \frac{2i\pi}{k_{zl} b} \times \\ &\quad \times \left(F_{0n} \operatorname{sgn}(m - n) + F_{1n} \frac{k_{zl}}{k_\rho} + F'_{1n} \frac{k_{yl}}{k_\rho} \operatorname{sgn}(m - n) \right), \\ \frac{F'_{1m}}{F'_1} &= e^{ik_z z_m} + \sum_{n \neq m} \sum_l e^{ik_{zl} |z_m - z_n|} \frac{F'_1(k_{yl})}{F'_1(k_{y0})} \frac{2i\pi}{k_{zl} b} \times \\ &\quad \times \left(F_{0n} + F_{1n} \frac{k_{zl}}{k_\rho} \operatorname{sgn}(m - n) + F'_{1n} \frac{k_{yl}}{k_\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

По своей структуре эта система полностью аналогична системе (3.42) и учитывает рассеяние на каждой (m -й) решетке как исходной плоской волны Ψ_0 (первое слагаемое в правой части уравнений (3.44)), так и волн, приходящих от всех остальных решеток (второе слагаемое). Бóльшая громоздкость приведенных уравнений по сравнению с (3.42) обусловлена учетом всех затухающих волн и рассмотрением общего случая произвольного (не нормального) падения волны на решетки.

Перейдем теперь от набора из M одномерных решеток к бесконечному (в направлении z) кристаллу. Решение уравнений Максвелла (3.43) описывает поле в кристалле, возникающее при рассеянии на нём плоской волны $\mathbf{E} = \mathbf{e}_0 e^{ik_1 \mathbf{r}}$. При этом величины F_{0m} , F_{1m} и F'_{1m} в (3.43) являются решениями

системы линейных *неоднородных* уравнений (3.44), столбец свободных членов которой как раз определяется амплитудой падающей на кристалл волны. Для нахождения собственных (нормальных) волн в бесконечном кристалле необходимо решить соответствующую систему *однородных* уравнений [118]. В соответствии с теоремой Блоха положим $F_{0n} = F_{00}e^{iq_z z_n}$, $F_{1n} = F_{10}e^{iq_z z_n}$, $F'_{1n} = F'_{10}e^{iq_z z_n}$, где q_z – неизвестная z -компонента волнового вектора в кристалле, а величины F_{00} , F_{10} , F'_{10} не зависят от z_n . Подставляя эти выражения в (3.44), а также убирая из уравнений (3.44) свободные члены $e^{ik_z z_m}$, соответствующие падающей на кристалл волне, получим однородную систему линейных уравнений для определения величин F_{00} , F_{10} и F'_{10} , которая имеет ненулевое решение только в случае, когда её определитель равен 0. После суммирования по n (это делается элементарно по формуле для суммы геометрической прогрессии), подстановки выражений (3.32) и некоторых преобразований, получим дисперсионное уравнение для нахождения q_z в виде условия равенства нулю определителя некоторой матрицы D размера 3×3 :

$$\det D = 0. \quad (3.45)$$

Поскольку в общем случае элементы этой матрицы имеют довольно громоздкий вид, мы вынесли их определение в приложение Б.

Рассмотрим ещё раз для примера случай нормального падения волны на кристалл ($k_x = k_y = 0$). Дисперсионное уравнение в этом случае принимает наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{k_1 b}{2\pi} = & -\frac{C_1 f_0}{1 + i\pi f_0 - S'_1 f_0} - \frac{C_5 f_1}{1 + i\pi f_1/2 - S'_3 f_1} + \\ & + \frac{2\pi}{k_1 b} \frac{(C_3^2 - C_1 C_5) f_0 f_1}{(1 + i\pi f_0 - S'_1 f_0)(1 + i\pi f_1/2 - S'_3 f_1)}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $S'_1 = \text{Re } S_1$, $S'_3 = \text{Re } S_3$, а функции C_1 , C_3 и C_5 зависят от периодов кристалла a , b и от волновых чисел $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ и q (см. приложение Б). Пусть $q = kn$, где n – показатель преломления кристалла. Если выполняется условие $|n^2 - \varepsilon_1 \mu_1| \ll 1$, и $k_1 a, k_1 b < 2\pi$, то эти функции будут приблизительно равны

$$C_1 \approx C_5 \approx -C_3 \approx -\frac{2\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{ka(n^2 - \varepsilon_1 \mu_1)}. \quad (3.47)$$

Подставляя эти значения в (3.46), сразу получаем выражение для показателя преломления n и эффективной диэлектрической восприимчивости кристалла $g_0 \equiv n^2 - 1$:

$$g_0 \approx \varepsilon_1 \mu_1 - 1 + \frac{4\pi}{k^2 ab} \left\{ \frac{f_0}{1 + i\pi f_0 - S'_1 f_0} + \frac{f_1}{1 + i\pi f_1/2 - S'_3 f_1} \right\}, \quad (3.48)$$

Если $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$, а амплитуды рассеяния малы (так что величинами $S'_1 f_0$ и $S'_3 f_1$ можно пренебречь), это выражение совпадает с результатами, полученными нами ранее (см. (3.31)).

Аналогичным образом можно решить дисперсионное уравнение и в случае, когда в кристалле выполняются условия дифракции Вульфа-Брэгга. Получающиеся при этом выражения для эффективных поляризуемостей g_{τ} (коэффициентов разложения эффективной диэлектрической проницаемости кристалла в ряд Фурье по векторам обратной решётки $\boldsymbol{\tau}$) также совпадают с приведенными в работе [3–А] (см. приложение Б) и, в частности, при $|\pi f_0|, |\pi f_1| \ll 1$ имеют вид:

$$g_{\tau} = \frac{4\pi}{k^2 \Omega_2} \left(\frac{f_0}{1 + i\pi f_0} + \frac{f_1}{1 + i\frac{\pi}{2} f_1} \cdot \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}) \right). \quad (3.49)$$

Если условие $|n^2 - \varepsilon_1 \mu_1| \ll 1$ для показателя преломления не выполняется, а также если амплитуда рассеяния не является малой ($|\pi f_{0,1}| \lesssim 1$), вместо приближенных выражений (3.47) необходимо пользоваться формулами (Б.5) из приложения Б. Разумеется, решения дисперсионного уравнения (полного (3.45) или упрощенного (3.46) в зависимости от геометрии задачи) в этом случае необходимо искать численно.

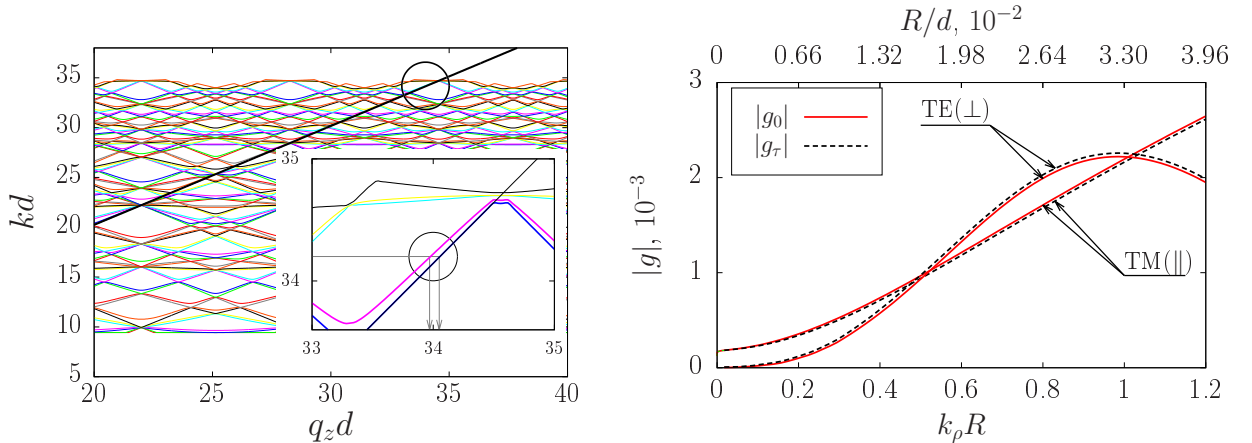


Рисунок 3.6. – Решения дисперсионного уравнения для кристалла из металлических (медных) нитей: слева — общий вид дисперсионных кривых; справа — зависимость абсолютных значений величин g_0, g_{τ} от $k_{\rho}R$ при $kd \approx 34.6$ (при $d = 2$ мм это соответствует частоте $f \approx 0.83$ ТГц)

На рисунке 3.6 приведен пример расчета величин g_0 и g_{τ} с помощью численного решения дисперсионного уравнения (3.45). Рассматривался кристалл с квадратной решеткой $a = b \equiv d$, образованный металлическими нитями; считалось, что $k_y = \frac{3\pi}{d}$ (т.е. в кристалле как минимум выполнены условия двухволновой дифракции). На левом графике приведен общий вид дисперсионных кривых для ТМ-поляризованной волны при $R/d = 5 \cdot 10^{-3}$. Черная

кривая представляет собой решение дисперсионного уравнения для вакуума ($k^2 = k_z^2 + k_y^2$, $k_z \equiv q_z$). На врезке увеличена область высоких частот и выделены два корня, соответствующие двум близким решениям дисперсионного уравнения. На правом графике показаны соответствующие абсолютные значения поляризуемостей, рассчитанные для выбранной геометрии при изменении параметра $k_\rho R$ в диапазоне $0 < k_\rho R < 1.2$. Видно, что для ТЕ-поляризованной волны g_0^\perp и g_τ^\perp при увеличении $k_\rho R$ растут и достигают максимума вблизи $k_\rho R \sim 1$. Для ТМ-поляризованной волны в рассматриваемом диапазоне абсолютные величины $|g_0^\parallel|$ и $|g_\tau^\parallel|$ монотонно растут. Обратим внимание, что сами величины g_0 и g_τ для ТМ-поляризованной волны отрицательны, тогда как для ТЕ-поляризованной – положительны (т.е. показатель преломления для ТЕ-волны больше единицы). При этом в рассматриваемом конкретном случае максимальные значения g_0^\perp , g_τ^\perp даже превышают соответствующие значения $|g_0^\parallel|$ и $|g_\tau^\parallel|$, хотя, как показывает расчет, в общем случае соотношение между этими величинами может меняться. Существенно, однако, что характер поведения поляризуемостей в проведенных нами расчетах для кристаллов из *металлических* нитей остается приблизительно одинаковым: для ТМ-поляризованной волны $|g_0|$ и $|g_\tau|$ монотонно растут при увеличении $k_\rho R$ от 0 до 1, для ТЕ-поляризованной $|g_0|$ и $|g_\tau|$ имеют максимум при больших $k_\rho R$ ($k_\rho R \sim 1$; точное положение максимума может смещаться в небольших пределах).

3.4 Выводы к главе 3

Таким образом, в данной главе проведен анализ распространения волн в двумерных кристаллах в случае, когда рассеяние на отдельном составляющем кристалл элементе является анизотропным. Получено дисперсионное уравнение, позволяющее найти возможные типы волн в таком кристалле и вычислить эффективные поляризуемости g_τ в общем случае (при произвольной величине амплитуды рассеяния $f(\varphi)$). Приведены решения дисперсионного уравнения и рассчитанные значения эффективных поляризуемостей для кристалла, образованного металлическими нитями (проволочками). В соответствии с найденными решениями, показатель преломления такого кристалла для ТЕ-поляризованной волны превышает единицу, а эффективная поляризуемость имеет максимум при $k_\rho R \approx 1$.

ГЛАВА 4

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ НИТЯМИ

В данной главе показано, что в фотонном кристалле, образованном параллельными металлическими нитями, возможно черенковское излучение. Получены уравнения, описывающие спонтанное излучение (переходное, черенковское, параметрическое), образуемое движущимися в кристаллах из нитей релятивистскими заряженными частицами, в условиях, когда радиус нитей сравним с длиной волны излучения ($kR \sim 1$). Найдена интенсивность излучения в области максимума, достигаемого при $kR \approx 1$. Подробно рассмотрено несколько примеров, в том числе для ТГц и оптического диапазонов. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [1–А, 5–А, 12–А, 13–А, 17–А, 18–А].

4.1 Черенковское излучение при $kR \ll 1$

Напомним, что частица, движущаяся с постоянной скоростью в вакууме, не может излучать электромагнитные волны. Иначе обстоит дело в преломляющей среде с показателем преломления $n(\omega) > 1$. В этом случае фазовая скорость света в среде $v_{ph} = c/n(\omega)$ меньше скорости света в вакууме c , и становится возможной ситуация, когда частицы будут двигаться в среде со скоростью, превышающей v_{ph} . Именно при таком движении и возникает излучение, называемое излучением Вавилова-Черенкова [21].

В работе [1–А] было впервые показано, что в фотонном кристалле, образованном параллельными металлическими нитями, возможно черенковское излучение. Рассмотрим случай, когда длина волны излучения много больше радиуса составляющих кристалл нитей ($kR \ll 1$). Приведем сначала результаты расчетов показателя преломления кристалла для волн с различной поляризацией в соответствии с полученными в предыдущей главе формулами, а затем рассмотрим вопрос об интенсивности излучения.

4.1.1 Показатель преломления кристалла для волны с ТЕ-поляризацией

Для простоты будем полагать, что нити расположены в вакууме ($\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$), а волна падает на кристалл нормально, т.е. $k_{1x} = k_{1y} = 0$, $k_\rho = k$ (см. рисунок 3.1). Пусть нити являются идеально проводящими. Тогда, пользуясь (3.4), найдём, что предельные значения для коэффициентов a_0^\perp и a_1^\perp при $kR \ll 1$ для идеального проводника ($\varepsilon \rightarrow i\infty$) будут иметь вид

$$a_0^\perp \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow i\infty} -\frac{J_1(kR)}{H_1(kR)} \xrightarrow{kR \ll 1} -i\frac{\pi(kR)^2}{4} - \left(\frac{\pi(kR)^2}{4}\right)^2,$$

и

$$a_1^\perp \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow i\infty} -\frac{J_1'(kR)}{H_1'(kR)} \xrightarrow{kR \ll 1} i\frac{\pi(kR)^2}{4} - \left(\frac{\pi(kR)^2}{4}\right)^2.$$

Тогда амплитуда рассеяния волны с ТЕ-поляризацией будет $f(\varphi) = f_0^\perp + f_1^\perp \cos \varphi$, где

$$f_0^\perp \approx -\left(\frac{kR}{2}\right)^2 + i\pi\left(\frac{kR}{2}\right)^4, \quad (4.1)$$

$$f_1^\perp \approx 2\left(\frac{kR}{2}\right)^2 + 2i\pi\left(\frac{kR}{2}\right)^4. \quad (4.2)$$

В случае, когда нити сделаны из материала с произвольным (конечным) ε , из равенств (3.4) можно найти, что при $kR \rightarrow 0$

$$f_0^\perp \approx \frac{1}{2}\left(\frac{kR}{2}\right)^4 (\varepsilon - 1) + \frac{1}{3}\left(\frac{kR}{2}\right)^6 (\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) + i\frac{\pi}{4}\left(\frac{kR}{2}\right)^8 (\varepsilon - 1)^2, \quad (4.3)$$

$$f_1^\perp \approx 2\left(\frac{kR}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} + 2i\pi\left(\frac{kR}{2}\right)^4 \frac{(\varepsilon - 1)^2}{(\varepsilon + 1)^2}. \quad (4.4)$$

Подставляя сюда значение диэлектрической проницаемости для металла $\varepsilon = 1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, и сохраняя только члены с низшими степенями kR , получим

$$f_0^\perp \approx i\left(\frac{kR}{2}\right)^3 \frac{\pi\sigma R}{c}, \quad (4.5)$$

$$f_1^\perp \approx 2\left(\frac{kR}{2}\right)^2 + i\left(\frac{kR}{2}\right)^3 \frac{2c}{\pi\sigma R}. \quad (4.6)$$

Используя (4.1)-(4.2), (4.5)-(4.6) и выражение для показателя преломления (3.31), можно найти, что при $kR \ll 1$ в случае идеально проводящих нитей

$$n_{\perp}^2 \approx 1 + \frac{\pi R^2}{\Omega_2}, \quad (4.7)$$

а для нитей с конечной проводимостью

$$n_{\perp}^2 \approx 1 + \frac{2\pi R^2}{\Omega_2} + i \frac{\pi R^2}{\Omega_2} \left(\frac{\pi \sigma R}{2c} + \frac{c}{\pi \sigma R} \right) (kR). \quad (4.8)$$

Таким образом, мы приходим к важному результату: в соответствии с (4.7)-(4.8), действительная часть показателя преломления рассматриваемого кристалла для волны с ТЕ-поляризацией превышает единицу. Отметим, что этот результат получен впервые в работе [1–А].

Из приведенных выражений также видно, что учет конечной проводимости нитей может быть очень важен при малых kR ; в частности, предельное (при $kR \rightarrow 0$) значение эффективной диэлектрической восприимчивости кристалла $g_0 = n^2 - 1$ при учете их конечной проводимости оказывается приблизительно в два раза больше, чем предсказывает модель идеально проводящих нитей. Отличия в значениях показателя преломления кристалла для этих двух случаев можно более наглядно показать на конкретном примере. Пусть радиус нитей в кристалле составляет $R = 15$ мкм, а периоды решётки $a = b = 0.1$ мм. На рисунке 4.1 приведены рассчитанные по формуле (3.31) значения действительной части показателя преломления такого кристалла для нитей с различной проводимостью.

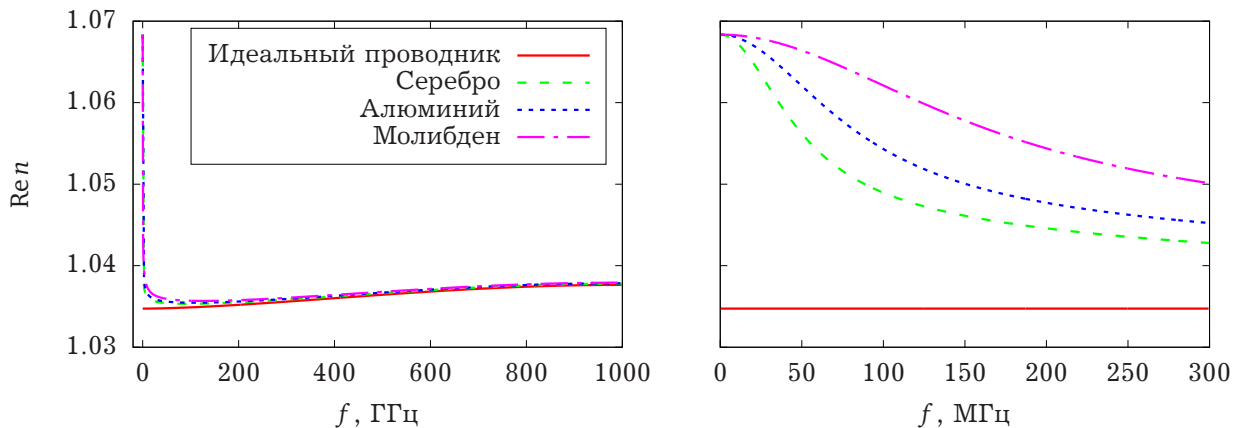


Рисунок 4.1. – Зависимости показателя преломления кристалла (ТЕ-поляризация) от частоты для различных материалов нитей. На графике справа показана увеличенная область низких частот. В расчетах использовались значения проводимости металлов при 0°C из справочника [119]

Из рисунка видно, что для выбранных параметров уже при частотах ниже 100 ГГц показатель преломления (точнее, разница $n - 1$) начинает заметно отличаться от предсказываемого моделью идеально проводящих нитей. Обратим внимание, что в случае нитей из реальных металлов n оказывается больше, чем для идеально проводящих нитей.

Интересным оказывается поведение мнимой части показателя преломления. В соответствии с формулой (4.8), при очень малых kR она линейно растет с ростом частоты. Расчет с использованием точных значений амплитуд рассеяния (3.4) показывает, что этот рост достаточно быстро прекращается, и мнимая часть показателя преломления на определенной частоте достигает максимума (рисунок 4.2).

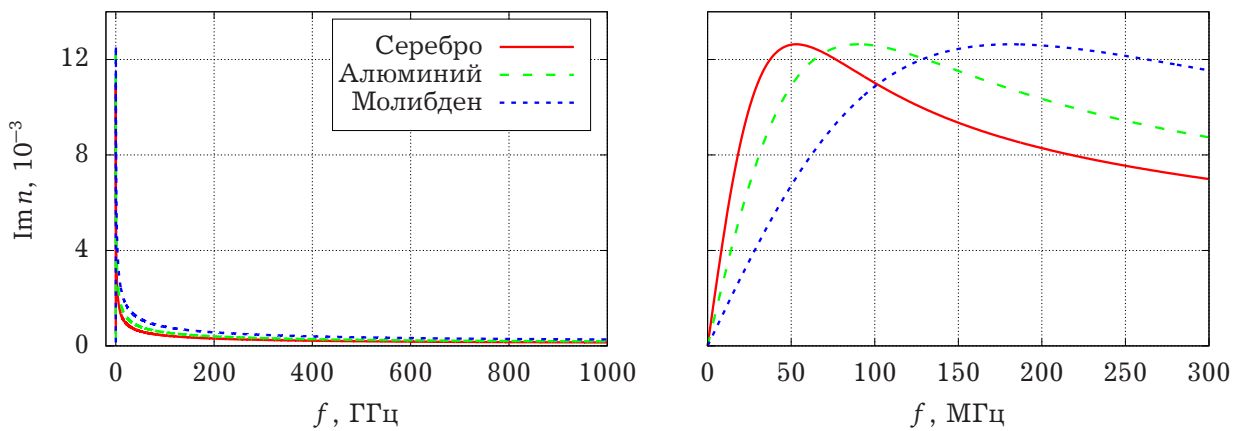


Рисунок 4.2. – Зависимости мнимой части показателя преломления кристалла (ТЕ-поляризация) от частоты для различных материалов нитей. На графике справа показана увеличенная область низких частот

При выбранных размерах (радиусе) нитей для типичных металлов этот максимум расположен в диапазоне частот 50–100 МГц. Анализ показывает, что положение максимума определяется соотношением радиуса нитей и (зависящей от частоты) толщины скин-слоя в металле $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$. На рисунке 4.3 показаны зависимости показателя преломления кристалла от величины R/δ , которые для всех металлов в приведенном диапазоне изменения R/δ одинаковы. Видно, что максимального значения $\text{Im } n$ достигает при $R/\delta \approx 1.8$, т.е. при такой частоте, когда глубина проникновения электромагнитного поля в металл становится приблизительно в два раза меньше радиуса нити. По мере увеличения частоты и соответствующего уменьшения толщины скин-слоя нити кристалла все с большей точностью можно считать идеально проводящими, и как мнимая, так и действительная часть показателя преломления кристалла уменьшаются; при этом последняя приближается к значению, характерному для случая идеально проводящих нитей.

Отметим, что приведенные особенности характерны не только для кри-

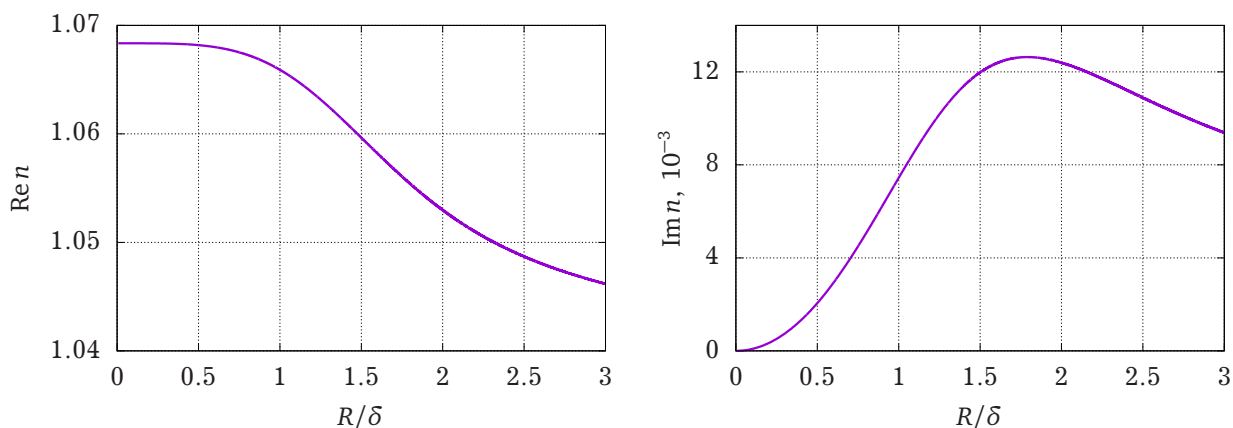
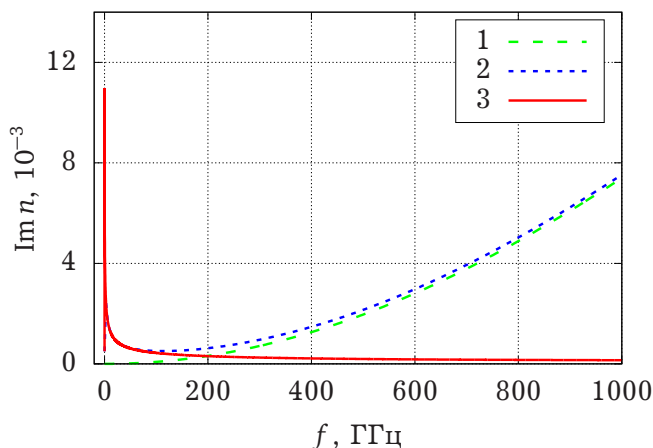


Рисунок 4.3. – Зависимость показателя преломления кристалла (ТЕ-поляризация) от величины R/δ , где R – радиус нитей, δ – глубина скин-слоя. Отношение $\pi R^2/\Omega_2 \approx 0.07$ фиксировано

сталла, но и для хаотической среды (т.е. среды, в которой нити расположены хаотическим образом). При небольших отношениях R/δ (т.е. достаточно низких частотах) и мнимая, и действительная части показателя преломления хаотической среды практически не отличаются от аналогичных значения для кристалла. Существенные отличия начинают проявляться на более высоких частотах (рисунок 4.4): мнимая часть показателя преломления хаотической среды начинает увеличиваться, значительно превышая мнимую часть n кристалла.



1 – хаотическая среда, идеально проводящие нити; **2** – хаотическая среда, нити из серебра; **3** – кристалл, нити из серебра.

Рисунок 4.4. – Зависимости мнимой части показателя преломления кристалла и хаотической среды с такой же средней плотностью расположения нитей от частоты

4.1.2 Показатель преломления кристалла для волны с ТМ-поляризацией

Рассмотрим теперь кратко преломление ТМ-поляризованной волны. В этом случае при $kR \ll 1$ рассеяние изотропно и для вычисления показателя преломления достаточно знать амплитуду f_0^{\parallel} . С учетом выражений (3.4), для идеально проводящих нитей имеем при $kR \ll 1$

$$f_0^{\parallel} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{iJ_0(kR)}{\pi H_0(kR)} \xrightarrow{kR \ll 1} \frac{1}{2C + 2 \ln \frac{kR}{2} - i\pi}, \quad (4.9)$$

а для нитей из металла с конечной проводимостью

$$f_0^{\parallel} \approx \frac{\frac{kR}{2}(\varepsilon - 1)}{\frac{2}{kR} + kR\varepsilon \ln \frac{kR}{2}} \approx \frac{1}{2 \ln \frac{kR}{2} - 2i \frac{c}{2\pi\sigma R} \frac{1}{kR}}. \quad (4.10)$$

Подставляя эти выражения в дисперсионное уравнение (см. приложение Б), в первом случае приходим к известному из литературы результату

$$n_{\parallel}^2 = 1 - \frac{k_p^2}{k^2}, \quad (4.11)$$

где

$$k_p^2 = \frac{2\pi/\Omega_2}{\ln \frac{\sqrt{ab}}{2\pi R} + F(a/b)}, \quad (4.12)$$

а функция $F(x)$ имеет вид [117]

$$F(x) = \frac{\pi}{6}x - \frac{1}{2} \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(\pi nx) - 1}{n} \approx \frac{\pi}{6} \left(x + \frac{1}{x} \right) - \frac{\sqrt{\ln^2(x) + (\pi/3)^2}}{2}. \quad (4.13)$$

Во втором случае (металл с конечной проводимостью) имеем

$$n_{\parallel}^2 \approx 1 - \frac{2\pi R^2}{\Omega_2} \left(\frac{2\pi\sigma R}{c} \right)^2 \left(\ln \frac{d}{2\pi R} + \frac{\pi}{4} \right) + i \frac{4\pi\sigma \pi R^2}{kc \Omega_2}. \quad (4.14)$$

Стоит обратить внимание на совершенно разное поведение величины n^2 (эффективной диэлектрической проницаемости кристалла) в этих двух случаях. Для идеально проводящих нитей n^2 является действительной величиной, и на низких частотах принимает большие по абсолютной величине отрицательные значения, обратно пропорциональные квадрату частоты. В случае же металла с конечной проводимостью n^2 имеет и действительную, и мнимую части; при этом действительная часть при уменьшении частоты

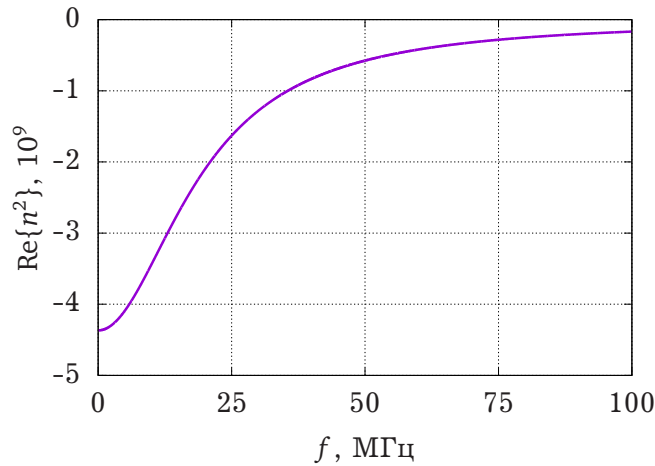


Рисунок 4.5. – Зависимость действительной части величины n^2 от частоты для ТМ-поляризации. Параметры кристалла те же, что и в приведенных выше примерах, расчет проведен для нитей из серебра

стремится к постоянному пределу (см. рисунок 4.5, где приведены результаты расчета показателя преломления по формуле (3.31)). Мнимая же часть имеет вид, характерный для проводника с эффективным значением проводимости $\sigma' = \sigma \frac{\pi R^2}{\Omega_2}$, и обратно пропорциональна первой степени частоты, а не второй.

Отметим также следующее обстоятельство. Во всех приведенных примерах для расчетов использовались справочные значения проводимости металлов из книги [119], а геометрические параметры кристалла таковы, что рассмотренные явления наиболее существенно проявляются на частотах в десятки и сотни МГц. Это, как правило, намного ниже частот, для работы на которых проектируются такие кристаллы. Однако в области инфракрасных и оптических частот проводимость (диэлектрическая проницаемость) металлов существенно меняется [120], и при типичных значениях радиуса нитей R порядка нескольких микрон и меньше величина δ может быть сравнима с R , так что все рассмотренные явления должны учитываться при разработке кристаллов для работы на таких высоких частотах.

4.1.3 Интенсивность черенковского излучения

Наиболее существенным результатом, полученным выше, является то, что показатель преломления фотонного кристалла из металлических нитей для волны с ТЕ-поляризацией превышает единицу, и, как следствие, в такой среде оказывается возможным черенковское излучение. Найдём величину интенсивности излучения. Для расчетов воспользуемся известным выражением для спектрально-углового распределения переходного и черенковского излучения, приведенным в обзорной главе (см. формулу (1.17)). Пусть, как и ранее, радиус нитей в кристалле составляет $R = 15$ мкм, периоды ре-

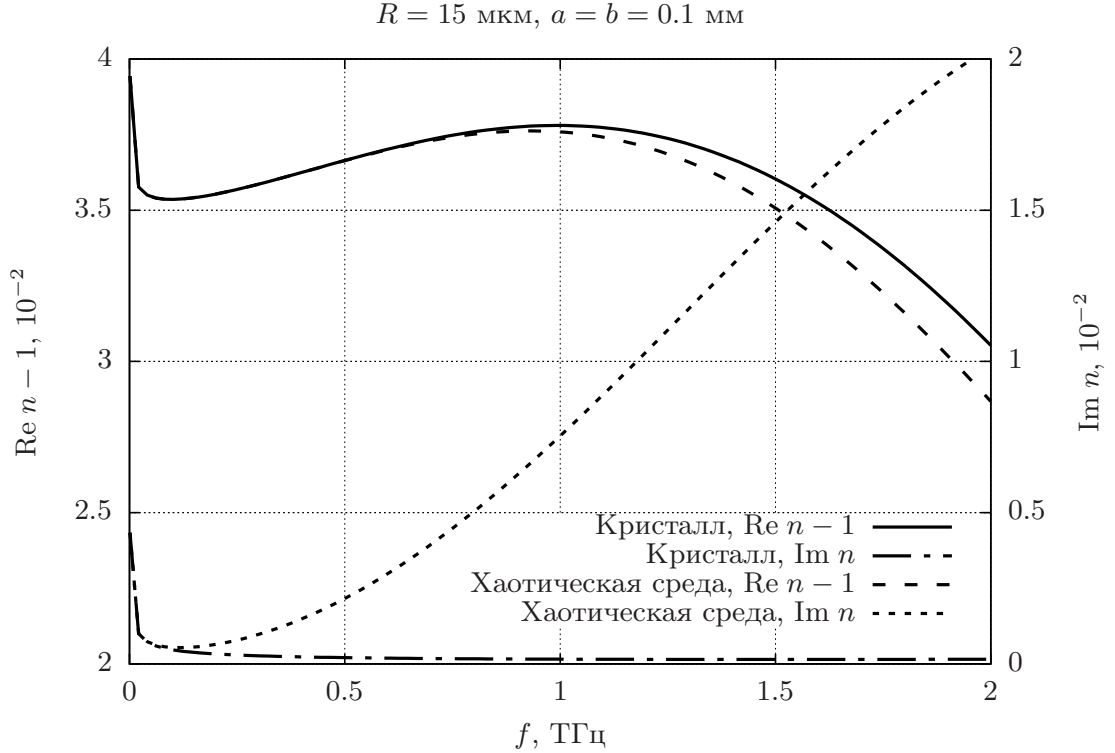


Рисунок 4.6. – Зависимости показателя преломления от частоты f для волны с ТЕ-поляризацией. Приняты следующие значения параметров: $R = 15 \text{ мкм}$, $a = b = 0.1 \text{ мм}$, материал нитей – медь

шётки $a = b = 0.1 \text{ мм}$, а толщина кристаллической пластинки $L = 10 \text{ см}$. Согласно (4.7), показатель преломления такого кристалла для волны с ТЕ-поляризацией $n^2 \approx 1.07$. Необходимо отметить, что при выбранном значении радиуса n слабо зависит от частоты вплоть до частот порядка 1 ТГц. На рисунке 4.6 ещё раз приведены рассчитанные с использованием выражений (3.4) для амплитуды рассеяния значения n для кристалла и для хаотической среды с одинаковой плотностью расположения нитей. Видно, что для кристалла величина $n - 1$ медленно увеличивается с ростом частоты, достигая максимума при $f \approx 1 \text{ ТГц}$. Действительная часть показателя преломления для хаотической среды по своему значению приблизительно такая же, как и для кристалла. Однако показатель преломления хаотической среды имеет достаточно большую мнимую часть (например, при $f = 1 \text{ ТГц}$ $\text{Im } n \approx 7.5 \cdot 10^{-3}$, см. рисунок 4.6). Соответственно, при прохождении хаотической среды толщиной $L = 10 \text{ см}$ амплитуда электромагнитной волны с частотой 1 ТГц уменьшится в $\exp(kL \cdot \text{Im } n) \sim 10^6$ раз, тогда как в случае кристалла она почти не изменится; для кристалла из идеально проводящих нитей $\text{Im } n \equiv 0$, а если нити сделаны, например, из меди, то с помощью (3.31) можно найти $\text{Im } n \approx 1.56 \cdot 10^{-4}$, что соответствует уменьшению амплитуды волны в 1.4 раза

(на длине 30 см амплитуда волны уменьшается приблизительно в e раз).

Будем считать, что скорость заряженной частицы перпендикулярна осям составляющих кристалл нитей. Предположим вначале, что заряд частицы $Q = 1$ (релятивистский электрон или протон). Рассмотрим случай, когда лоренц-фактор частицы не слишком велик; пусть например $\gamma = 5$. При таком значении γ для выбранной толщины кристалла и для частот излучения выше 100 ГГц выполняется условие $L > \lambda\gamma^2$, и, в соответствии с приведенными в обзорной главе результатами, основной вклад в суммарную интенсивность черенковского и переходного излучения (см. формулу (1.17)) вносит именно черенковское излучение.

На рисунке 4.7 показана рассчитанная с помощью выражения (1.17) интенсивность черенковского излучения в кристалле, образованном металлическими нитями. Из приведенного на рисунке 4.7 графика следует, что, к

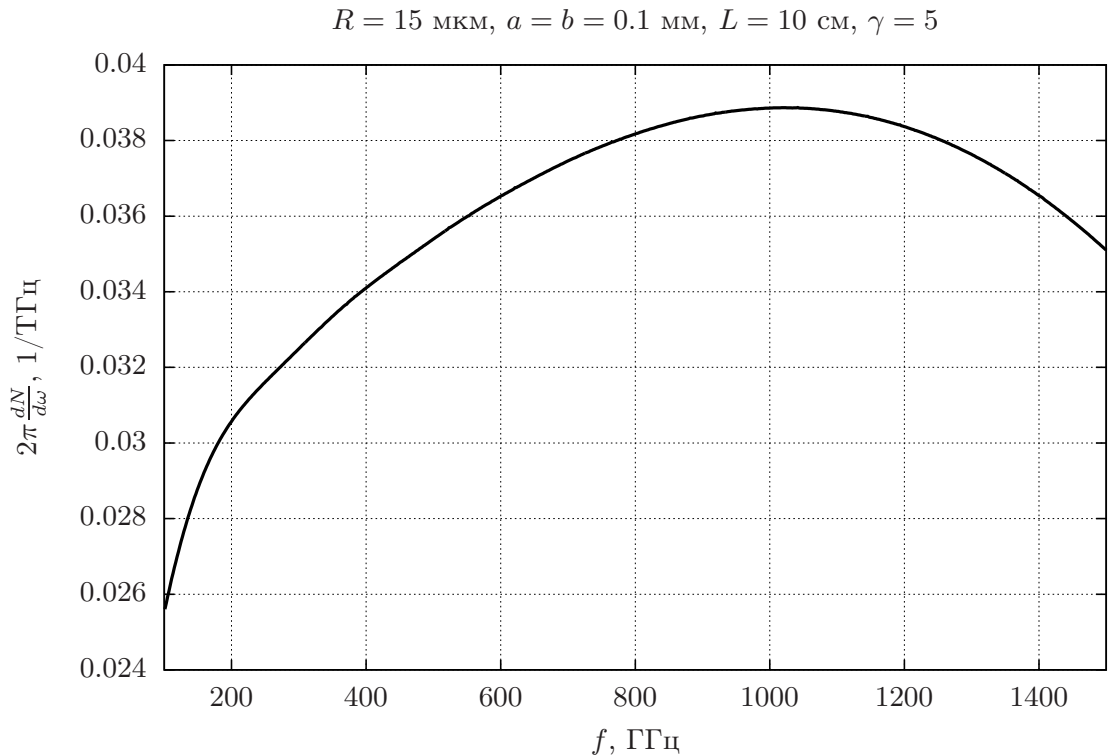


Рисунок 4.7. – Интенсивность черенковского излучения в фотонном кристалле, образованном металлическими нитями

примеру, в диапазоне частот $95 \div 105$ ГГц ($\Delta f/f \approx 0.1$ при $f = 100$ ГГц) электрон при пролете через рассматриваемый кристалл толщиной 10 см излучает приблизительно $N \sim 2.6 \cdot 10^{-4}$ фотонов. Аналогично, если рассмотреть генерацию на частоте $f \approx 1$ ТГц (возьмем для примера диапазон от 0.95 ТГц до 1.05 ТГц, $\Delta f/f$ остается тем же), то количество испущенных фотонов уже будет $N \sim 3.9 \cdot 10^{-3}$. Тогда, для релятивистского пучка электронов с током $I = 1$ А, среднее число фотонов, испущенных за одну секунду

будет $N \sim 1.6 \cdot 10^{15}$ для $f = 100$ ГГц, и $N \sim 2.4 \cdot 10^{16}$ для $f = 1$ ТГц, что соответствует мощности излучения $\sim 1 \cdot 10^{-7}$ Вт и $\sim 1.6 \cdot 10^{-5}$ Вт соответственно. Разумеется, для частиц с бóльшим зарядом интенсивность излучения будет выше. Предположим для примера, что такой же ток 1 А создаётся пучком релятивистских ядер с зарядом $Q \sim 50$. Тогда соответствующая мощность излучения будет $2.5 \cdot 10^{-4}$ Вт и $4 \cdot 10^{-3}$ Вт, что вполне может быть зарегистрировано экспериментально.

Заметим, что современные ускорители, как правило, генерируют пучки, состоящие из коротких сгустков (банчей) частиц. Например, ускоритель JLab ERL в Лаборатории Джефферсона (США) способен генерировать сгустки электронов с энергией до 40 MeV с зарядом 100 пКл (число электронов в сгустке $N_e \approx 6.25 \cdot 10^8$) и частотой повторения 37.4 МГц [10]. При этом длительность сгустка не превышает 500 фс. В настоящее время активно ведутся работы по увеличению числа частиц в фемтосекундных сгустках работающих и строящихся ускорителей до $10^{10} - 10^{11}$ и более. Известно, в частности, о получении в Ливерморской национальной лаборатории в США коротких (с длительностью в десятки фемтосекунд) сгустков протонов с числом частиц порядка 10^{13} и энергией от нескольких единиц до десятков МэВ; планируется с помощью лазерного ускорения увеличивать их энергию до единиц ГэВ и более (см. [121], а также [122–126]). Поскольку в рассматриваемых частотных диапазонах размеры таких сгустков могут быть много меньше длины волны, частицы (электроны, протоны) сгустка будут излучать когерентно. Это значит, что при рассмотрении черенковского излучения от такого сгустка он может быть заменен одной частицей с электрическим зарядом, равным числу частиц в сгустке.

Для оценки интенсивности черенковского излучения от сгустка частиц используем приведенные выше характеристики ускорителя JLab ERL [10]. Учитывая его высокую частоту повторения, среднее число фотонов, излучаемых пучком за 1 секунду в рассматриваемом кристалле будет $N \sim 3.8 \cdot 10^{21}$ при $f = 100$ ГГц, что соответствует средней мощности излучения $P \sim 0.25$ Вт. Аналогично, к примеру, на частоте $f = 500$ ГГц имеем следующую оценку для мощности: $P \sim 8.7$ Вт. Для большей ясности, приведенные оценки сведены в таблицу 4.1. Отметим также, что использование фемтосекундных сгустков с большим ($\sim 10^{13}$) числом частиц позволит получать в рассмотренном кристалле короткие импульсы черенковского излучения с очень большой пиковой мощностью (порядка сотен ГВт; энергия в импульсе до сотен Дж).

Таблица 4.1. – Оценка интенсивности черенковского излучения для кристалла из металлических нитей с $a = b = 0.1$ мм, $R = 15$ мкм, $L = 10$ см

f , ГГц	λ , мм	N	P_1 , Вт	P_2 , Вт
100	3	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.25
200	1.5	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-7}$	1.2
500	0.6	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$	8.7
1000	0.3	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	—

Примечание - Обозначения в таблице: N – число фотонов, излучаемых 1 электроном в диапазоне частот $f \pm 0.05f$, P_1 – средняя мощность излучения, генерируемого электронным пучком с током 1 А (пучок без банчировки), P_2 – средняя мощность излучения в случае сбанчированного пучка (в расчетах использовались параметры пучка для ускорителя JLab ERL в лаборатории Джефферсона [10]), f и λ – частота и длина волны излучения.

4.2 Излучение в кристалле из металлических нитей при больших kR

4.2.1 Выражения для спектрально-углового распределения

Полученные выше выражения для полей (3.43) и соотношения (3.44) позволяют проанализировать процесс излучения фотонов заряженной частицей в кристалле, образованном параллельными нитями, в случае $k_\rho R \sim 1$. Пусть

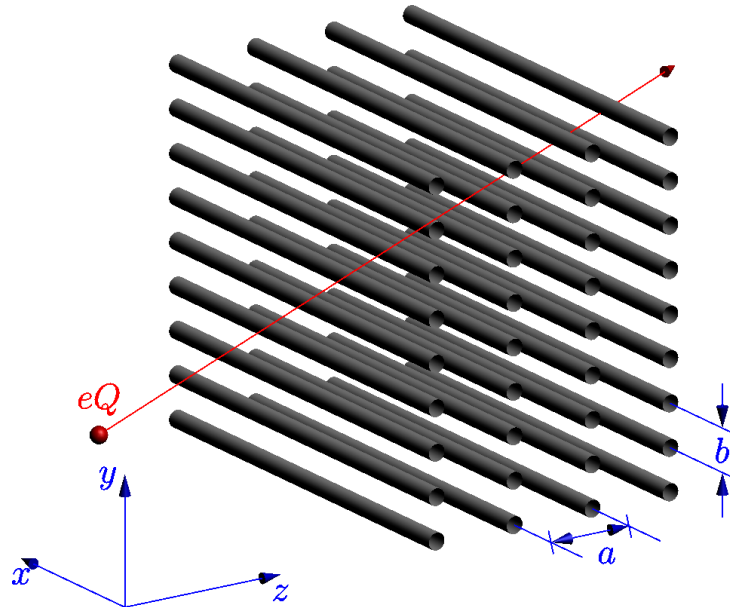


Рисунок 4.8. – Фотонный кристалл, образованный параллельными металлическими нитями и принятая в работе система координат

скорость частицы, пролетающей через кристалл, равна $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, и соответственно, её траектория $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$ (см. рисунок 4.8). Положим также для

простоты $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$. После подстановки выражений (3.43) в формулу для спектрально-углового распределения излучения (1.2) и некоторых преобразований можно получить

$$\frac{d^2 N^s}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 Q^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot |I^s|^2, \quad (4.15)$$

где для ТМ-поляризации

$$I^{\parallel} = \frac{1}{k_{\rho} b} \sum_n \frac{1}{k_{zn}} \left\{ \left(\mathcal{F}_{0n} + \mathcal{F}_{1n} \frac{k_{zn}}{k_{\rho}} + \mathcal{F}'_{1n} \frac{k_{yn}}{k_{\rho}} \right) \frac{\mathbf{e}_x[\mathbf{k}_n, [\mathbf{k}_n, \mathbf{v}]]}{\omega - \mathbf{k}_n \mathbf{v}} - \left(\mathcal{F}_{0n} - \mathcal{F}_{1n} \frac{k_{zn}}{k_{\rho}} + \mathcal{F}'_{1n} \frac{k_{yn}}{k_{\rho}} \right) \frac{\mathbf{e}_x[\mathbf{k}_n^{(-)}, [\mathbf{k}_n^{(-)}, \mathbf{v}]]}{\omega - \mathbf{k}_n^{(-)} \mathbf{v}} \right\}, \quad (4.16)$$

для ТЕ-поляризации

$$I^{\perp} = \frac{1}{k_{\rho} b} \sum_n \frac{1}{k_{zn}} \left\{ \left(\mathcal{F}_{0n}^{\perp} + \mathcal{F}_{1n}^{\perp} \frac{k_{zn}}{k_{\rho}} + \mathcal{F}'_{1n}^{\perp} \frac{k_{yn}}{k_{\rho}} \right) \frac{\mathbf{e}_x[\mathbf{k}_n, \mathbf{v}]}{\omega - \mathbf{k}_n \mathbf{v}} - \left(\mathcal{F}_{0n}^{\perp} - \mathcal{F}_{1n}^{\perp} \frac{k_{zn}}{k_{\rho}} + \mathcal{F}'_{1n}^{\perp} \frac{k_{yn}}{k_{\rho}} \right) \frac{\mathbf{e}_x[\mathbf{k}_n^{(-)}, \mathbf{v}]}{\omega - \mathbf{k}_n^{(-)} \mathbf{v}} \right\}, \quad (4.17)$$

величины \mathcal{F}_{0n} , \mathcal{F}_{1n} и \mathcal{F}'_{1n} равны

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{0n} &= \sum_{m=1}^M F_{0m} e^{i \frac{z_m}{v_z} (\omega - k_x v_x - k_{yn} v_y)}, \\ \mathcal{F}_{1n} &= \sum_{m=1}^M F_{1m} e^{i \frac{z_m}{v_z} (\omega - k_x v_x - k_{yn} v_y)}, \\ \mathcal{F}'_{1n} &= \sum_{m=1}^M F'_{1m} e^{i \frac{z_m}{v_z} (\omega - k_x v_x - k_{yn} v_y)}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

и введены обозначения $\mathbf{k}_n = (k_x, k_{yn}, k_{zn})$, $\mathbf{k}_n^{(-)} = (k_x, k_{yn}, -k_{zn})$.

Формулы (4.15)-(4.18) вместе с системой уравнений (3.44) описывают процесс излучения заряженной частицей, пролетающей с постоянной скоростью через кристалл из нитей. Предположим, что исследуемый фотонный кристалл состоит из небольшого числа кристаллических плоскостей (несколько десятков или сотен), как это обычно и имеет место на практике. В этом случае систему уравнений (3.44) можно эффективно решать численно. Если система (3.44) решена, и значения амплитуд F_{0m} , F_{1m} , F'_{1m} найдены, то спектрально-угловое распределение излучения рассчитывается с использованием выражений (4.15)-(4.18). В общем виде аналитически проинтегрировать

эти выражения не представляется возможным, и при их использовании для расчета полной интенсивности излучения необходимо прибегнуть к процедуре численного интегрирования.

Обратим внимание, что при расчете спектрально-углового распределения с помощью выражений (4.15)-(4.18) необходимо проводить двойное суммирование, что не всегда удобно. Оказывается, что во многих случаях эти формулы можно существенно упростить, проведя суммирование по индексу n аналитически, и оставив только суммирование по m (по плоскостям). Проще всего это сделать, если в основную формулу (1.2), связывающую спектрально-угловое распределение излучения с решениями однородных уравнений Максвелла, подставить решения не в форме (3.43) (где сделан переход от суммирования цилиндрических волн к суммированию плоских волн), а в форме (3.21). В этом виде получающиеся выражения могут быть проинтегрированы, а затем и просуммированы. С тем же результатом можно, конечно, и непосредственно просуммировать по n выражения (4.16)-(4.17), хотя это сопряжено со значительно большими математическими трудностями. Далее мы не будем останавливаться на детальном изложении необходимых преобразований, а приведем лишь конечные выражения для нескольких характерных случаев.

Пусть скорость частицы \mathbf{v} направлена вдоль оси z (см. рисунок 4.8). Тогда величины I^{\parallel} и I^{\perp} можно представить в следующем виде:

$$I^{\parallel} = \frac{i\omega k_x}{k_{\rho}\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{v}\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2}}{\operatorname{ch} \frac{b}{v}\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2} - \cos k_y b} \times \\ \times \sum_{m=0}^{M-1} e^{i\omega m a/v} \left(F_{0m} - F_{1m} \frac{\omega}{k_{\rho} v} - i F'_{1m} \frac{\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2}}{k_{\rho} v} \frac{\sin k_y b}{\operatorname{sh} \frac{b}{v}\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2}} \right), \quad (4.19)$$

$$I^{\perp} = -\frac{k}{k_{\rho}} \cdot \frac{\sin k_y b}{\operatorname{ch} \frac{b}{v}\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2} - \cos k_y b} \times \\ \times \sum_{m=0}^{M-1} e^{i\omega m a/v} \left(F_{0m} - F_{1m} \frac{\omega}{k_{\rho} v} + F'_{1m} \frac{\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2}}{k_{\rho} v} \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{v}\sqrt{\omega^2 - k_{\rho}^2 v^2}}{\sin k_y b} \right). \quad (4.20)$$

В справочных целях приведем также преобразованные выражения для I^{\parallel} и I^{\perp} с явно выделенной зависимостью от угловых переменных θ , φ (полярный и азимутальный углы в сферической системе координат). Учитывая, что $k_z =$

$k \cos \theta$, $k_y = k \sin \theta \sin \varphi$, $k_x = k \sin \theta \cos \varphi$, $k_\rho = \sqrt{k^2 - k_x^2}$, $k = \omega/c$, имеем

$$I^{\parallel} = \frac{i \sin \theta \cos \varphi}{x_1 x_2} \cdot \frac{\text{sh}(k b x_1 / \beta)}{\text{ch}(k b x_1 / \beta) - \cos(k b \sin \theta \sin \varphi)} \times \\ \times \sum_{m=0}^{M-1} e^{i k m a / \beta} \left(F_{0m} - F_{1m} \frac{1}{\beta x_2} - i F'_{1m} \frac{x_1}{\beta x_2} \frac{\sin(k b \sin \theta \sin \varphi)}{\text{sh}(k b x_1 / \beta)} \right), \quad (4.21)$$

$$I^{\perp} = -\frac{1}{x_2} \cdot \frac{\sin(k b \sin \theta \sin \varphi)}{\text{ch}(k b x_1 / \beta) - \cos(k b \sin \theta \sin \varphi)} \times \\ \times \sum_{m=0}^{M-1} e^{i k m a / \beta} \left(F_{0m} - F_{1m} \frac{1}{\beta x_2} - i F'_{1m} \frac{x_1}{\beta x_2} \frac{\text{sh}(k b x_1 / \beta)}{\sin(k b \sin \theta \sin \varphi)} \right), \quad (4.22)$$

где $x_1 = \sqrt{\gamma^{-2} + \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}$, $x_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}$, $\beta = v/c$, γ – лоренц-фактор частицы.

Приведем также выражение для спектрально-углового распределения излучения в случае изотропного рассеяния, которое имеет место для волны с ТМ-поляризацией при выполнении условия $kR \ll 1$. Пусть теперь только x -компонента скорости частицы равна 0. Тогда

$$I^{\parallel} = \frac{k_x \omega}{k_\rho \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2}} \cdot \frac{1}{\text{ch} \frac{v_z b}{v^2} \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2} - \cos(k_y b - \omega v_y b / v^2)} \times \\ \times \sum_{m=0}^{M-1} F_{0m} e^{i m a (\omega - k_y v_y) / v_z} \cdot e^{-i(k_y b - \omega v_y b / v^2) \gamma_m} \times \\ \times \left(e^{i(k_y b - \omega v_y b / v^2)} \text{sh} \frac{v_z b}{v^2} \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2} \gamma_m + \text{sh} \frac{v_z b}{v^2} \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2} (1 - \gamma_m) \right), \quad (4.23)$$

где γ_m – зависящее от m действительное число, такое, что $0 \leq \gamma_m < 1$, $\gamma_m = -\frac{m a v_y}{b v_z} - N$, где N – целое.

Выражения (4.15)–(4.23) в принципе позволяют проводить анализ излучения для периодических структур, состоящих из произвольного числа кристаллических плоскостей M , даже настолько малого, когда такие структуры ещё нельзя называть двумерными кристаллами (вплоть до $M = 1$). Поскольку излучение в таких структурах представляет отдельный интерес, мы ещё вернемся к этому вопросу в пункте 4.2.2.

Для упрощения анализа процесса излучения можно также воспользоваться предварительно рассчитанными с помощью дисперсионного уравнения параметрами g_0 , g_τ и известными выражениями для спектрально-углового распределения черенковского, переходного и параметрического излучения, приведенными в главе 1. Для удобства выпишем необходимые формулы ещё раз.

Если условия брэгговской дифракции в кристалле не выполняются и $|g_0| \ll 1$, то волновой вектор в кристалле $\mathbf{q} \approx \mathbf{k} + \frac{\omega g_0}{2c\gamma_0} \mathbf{N}$, где \mathbf{N} – нормаль к поверхности кристалла, $\gamma_0 = \mathbf{kN}/k$. Спектрально-угловое распределение черенковского и переходного излучения в этом случае имеет следующий вид (см. формулу (1.17))

$$\frac{d^2 N^s}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} (\mathbf{e}_s \mathbf{v})^2 \left| e^{i\frac{\omega L g_0^s}{2c\gamma_0}} \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - \frac{1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}} \right] \left(e^{i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})\frac{L}{c\gamma_0}} - 1 \right) \right|^2. \quad (4.24)$$

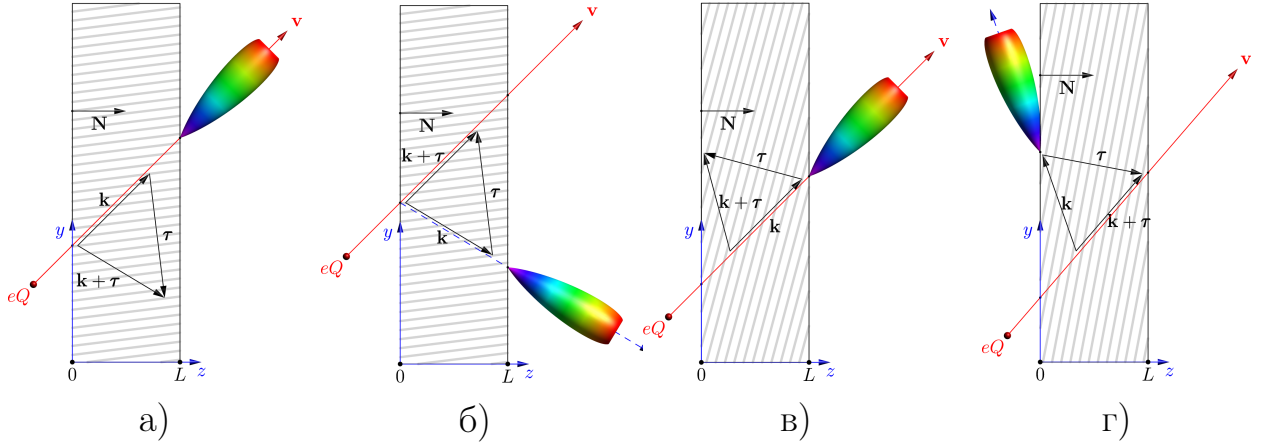


Рисунок 4.9. – Параметрическое излучение в фотонном кристалле в случае двухволновой дифракции в геометрии Лауэ (а, б) и Брэгга (в, г). Ось x перпендикулярна плоскости рисунка

Пусть теперь в кристалле для излучаемой волны выполняются условия двухволновой дифракции в геометрии Лауэ (рисунок 4.9). В этом случае, в соответствии с результатами [61] (см. формулы (1.21)-(1.22)), спектрально-угловое распределение параметрического излучения под малым углом к скорости частицы имеет вид

$$\frac{d^2 N_0^s}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} (\mathbf{e}_s \mathbf{v})^2 \times \left| \sum_{\mu=1,2} \xi_{\mu s}^0 e^{i\frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} L} \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - \frac{1}{\omega - \mathbf{q}_{\mu s}\mathbf{v}} \right] \left(e^{i(\omega - \mathbf{q}_{\mu s}\mathbf{v})\frac{L}{c\gamma_0}} - 1 \right) \right|^2, \quad (4.25)$$

а для излучения в направлении дифракции

$$\frac{d^2 N_\tau^s}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} (\mathbf{e}_s^\tau \mathbf{v})^2 \times \left| \sum_{\mu=1,2} \beta_1 \xi_{\mu s}^\tau e^{i\frac{\omega}{c\gamma_0} \varepsilon_{\mu s} L} \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k}_\tau \mathbf{v}} - \frac{1}{\omega - \mathbf{q}_{\tau \mu s} \mathbf{v}} \right] \left(e^{i(\omega - \mathbf{q}_{\tau \mu s} \mathbf{v})\frac{L}{c\gamma_0}} - 1 \right) \right|^2, \quad (4.26)$$

где $\mathbf{q}_{\mu s}$ – корни дисперсионного уравнения, $\mathbf{k}_\tau = ((\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})_\perp, \sqrt{k^2 - (\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})_\perp^2})$, $\mathbf{q}_{\tau\mu s} = \mathbf{q}_{\mu s} + \boldsymbol{\tau}$, $\varepsilon_{\mu s} = \gamma_0^2(q_{z\mu s}/k_z - 1)$, $\gamma_0 = \mathbf{k}\mathbf{N}/k$, $\gamma_1 = (\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{N}/|\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}|$, $\beta_1 = \gamma_0/\gamma_1$, \mathbf{N} – нормаль к входной поверхности кристалла, направленная внутрь кристалла, индексом “ \perp ” обозначены компоненты векторов, перпендикулярные \mathbf{N} , $\mathbf{e}_1 \parallel [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}]$, $\mathbf{e}_2 \parallel [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1]$, и

$$\xi_{1(2)s}^0 = \mp \frac{2\varepsilon_{2(1)s} - g_0^s}{2(\varepsilon_{2s} - \varepsilon_{1s})}, \quad \xi_{1(2)s}^\tau = \pm \frac{g_\tau^s}{2(\varepsilon_{2s} - \varepsilon_{1s})}.$$

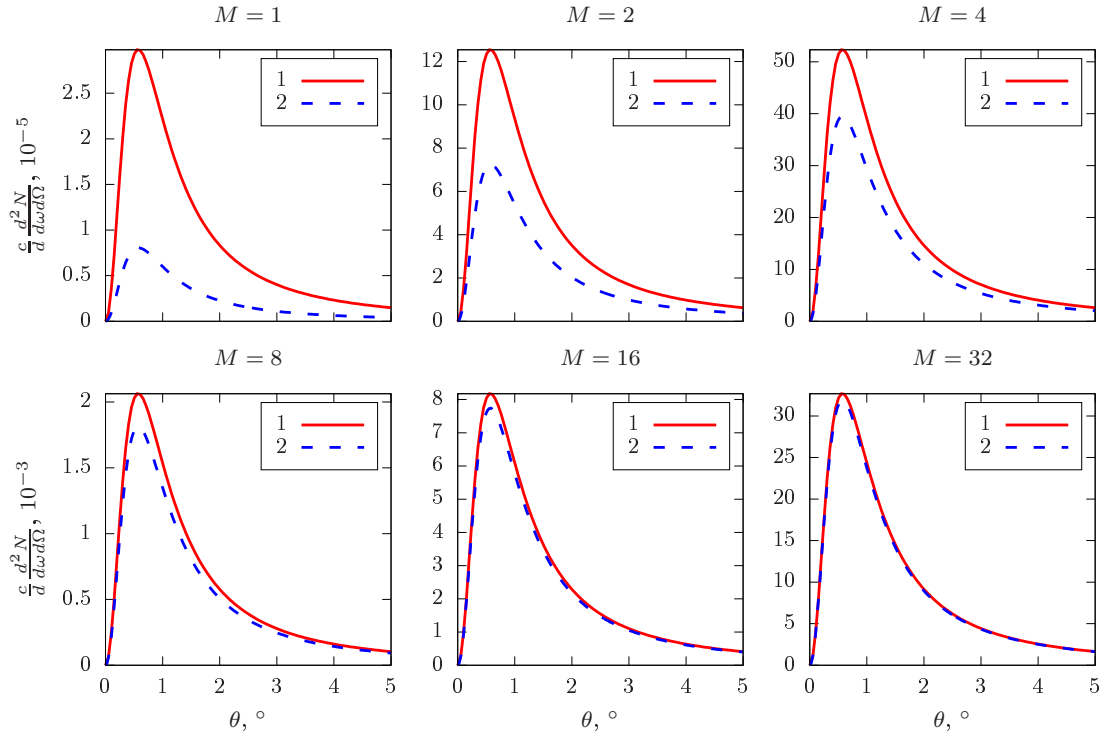
Выражения для спектрально-углового распределения параметрического излучения в случае геометрии Брэгга имеют похожий на (4.25)-(4.26) вид и приведены в [75].

4.2.2 Излучение в одномерной решетке из нитей и в структуре, состоящей из небольшого числа кристаллических плоскостей

Общезначимый интерес представляет исследование излучения заряженной частицы, пролетающей через структуры из параллельных нитей, состоящие из небольшого числа одномерных решеток M . Такое исследование может быть важно и для многих приложений (создание источников излучения, детекторов заряженных частиц), в которых большое значение имеет задача уменьшения размеров устройств.

Нами было проведено сравнение спектрально-угловых распределений переходного излучения, рассчитанных с помощью известных формул для кристалла (формулы (1.17) и (4.24)), и с помощью полученных выше выражений (4.15)-(4.20). Типичные результаты приведены на рисунке 4.10. В данном примере рассматривался кристалл с квадратной решеткой $a = b \equiv d$, лоренц-фактор частицы (электрона) принимался равным $\gamma = 10$. На рисунке изображены зависимости величины $\frac{c}{d} \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}$ от угла θ , полученные для структур различной толщины (т.е. с различным числом кристаллических плоскостей M). При расчетах по формуле (4.24) толщина кристалла L принималась равной $L = (M - 1)d$.

Видно, что при малом числе кристаллических плоскостей ($M \lesssim 10$) результаты расчетов по формулам (4.15) и (4.20) и по формуле (4.24) достаточно сильно отличаются, причем формула (4.24) дает заниженный результат. Это связано с тем, что при таком малом числе периодов ещё нельзя ввести усредненную эффективную диэлектрическую восприимчивость кристалла для описания преломления волны. При увеличении числа плоскостей M результаты расчетов по двум разным формулам начинают сближаться,



1 – расчет по точным формулам (4.15) и (4.20), **2** – расчет по формуле (4.24). лоренц-фактор электрона $\gamma = 10$, $k_\rho R = 0.1$, $kd \approx 2.51$, эффективная диэлектрическая восприимчивость кристалла $g_0 \approx 5.27 \cdot 10^{-3}$, $\varphi = 90^\circ$.

Рисунок 4.10. – Спектрально-угловые распределения излучения электрона в кристалле, образованном параллельными металлическими нитями, при различном M (ТЕ-поляризация)

и уже при $M \sim 16$ дают лишь небольшую разбежку, а когда M составляет несколько десятков, практически совпадает. В этом случае можно говорить, что мы имеем дело именно с кристаллической пластинкой, которую можно характеризовать некоторым эффективным значением диэлектрической восприимчивости, а не с набором нескольких одномерных решеток из нитей.

Представляет интерес исследовать с помощью полученных выражений зависимость интенсивности излучения от величины $k_\rho R$ (напомним, $k_\rho = \sqrt{k^2 - k_x^2}$) при различных, в том числе малых, значениях M . Пусть для примера период кристалла $d = 2$ мм, толщина $L = 10$ см (т.е. число плоскостей $M = 51$), лоренц-фактор частицы (электрона) $\gamma = 100$, скорость частицы перпендикулярна нитям. На рисунке 4.11б) показана рассчитанная с помощью дисперсионного уравнения эффективная диэлектрическая восприимчивость кристалла g_0^\perp для ТЕ-поляризованной волны как функция параметра $k_\rho R$ при $kd \approx 35.5$ (что для выбранного периода соответствует частоте $f \approx 0.85$ ТГц). На рисунке 4.11а) показана интенсивность излучения (для ТЕ-поляризации) как функция $k_\rho R$, полученная интегрированием выражений (4.15), (4.22) по угловым координатам. Приведены результаты расчетов

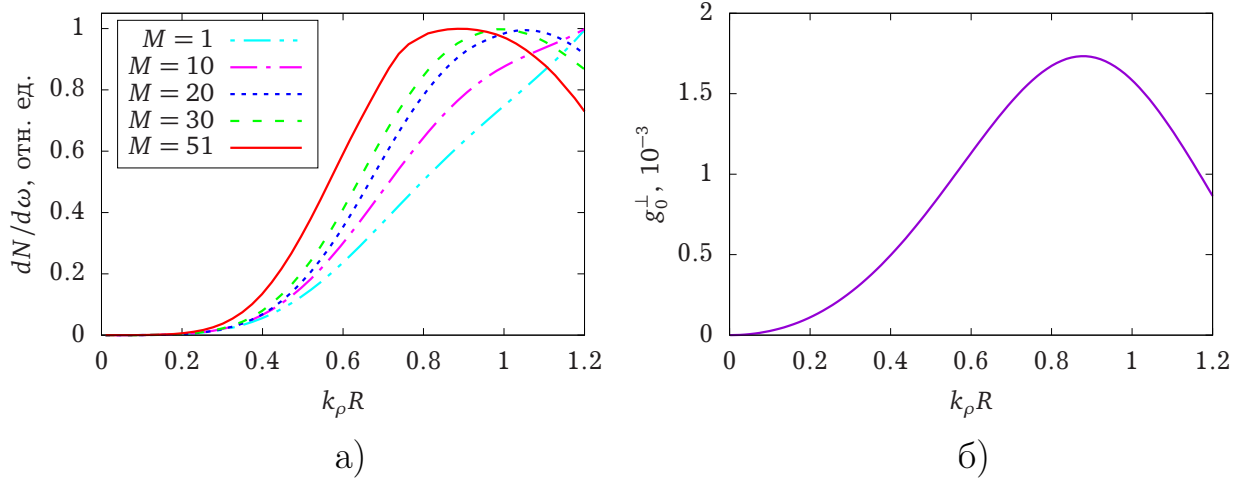


Рисунок 4.11. – Результаты расчетов для ТЕ-поляризованной компоненты излучения: а) зависимость интенсивности излучения от величины $k_\rho R$, полученная при расчетах по формулам (4.15), (4.22) для кристаллических пластинок разной толщины (s с разным M); б) эффективная диэлектрическая восприимчивость g_0^\perp кристалла, образованного металлическими нитями, как функция $k_\rho R$. Приняты следующие значения параметров: $kd = 35.5$, $\gamma = 100$

для кристаллической пластинки, состоящей из $M = 51$ слоя нитей (как в исходной задаче), и для более тонких пластинок ($M = 1, 10, 20, 30$); для удобства каждая кривая нормирована на максимальное значение.

Из рисунка 4.11 можно видеть, что при небольшом числе слоёв ($M \lesssim 15$) зависимость интенсивности излучения от $k_\rho R$ в рассматриваемом диапазоне ($0 < k_\rho R < 1.2$) является монотонной. Однако уже при $M = 20$ в области $k_\rho R \sim 1$ появляется характерный максимум. При дальнейшем увеличении числа плоскостей положение этого максимума смещается в сторону меньших значений $k_\rho R$, и для $M = 51$ получается такой же результат, как и при расчетах по формуле (4.24): максимум излучения располагается при $k_\rho R \approx 0.9$ и соответствует максимальному значению g_0^\perp (в рассматриваемом примере $g_{0,max}^\perp \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$, см. рисунок 4.11 б)).

На рисунке 4.12 показаны зависимости интенсивности излучения от $k_\rho R$ при различных M , рассчитанные на более низкой частоте ($kd = 5$; если период $d = 2$ мм, это соответствует частоте $f \approx 120$ ГГц). В этом случае даже при $M = 1$ интенсивность имеет максимум в области больших значений параметра $k_\rho R$, положение которого лишь немного смещается вниз при увеличении M . Уже при $M \approx 10$ кривая принимает такой же вид, как и при расчете по формуле (4.24). Максимум в этом случае располагается при $k_\rho R \approx 0.85$, что также соответствует максимальному значению $g_{0,max}^\perp \approx 0.06$ для данной частоты (см. рисунок 4.12 б)). Обратим внимание, что в обоих приведенных примерах форма кривой интенсивности и положение максимума окончательно формируются, когда число плоскостей M достаточно велико для того,

чтобы выполнялось условие $kL|n - 1| = kdM|\sqrt{1 + g_{0,max}} - 1| \sim 1$.

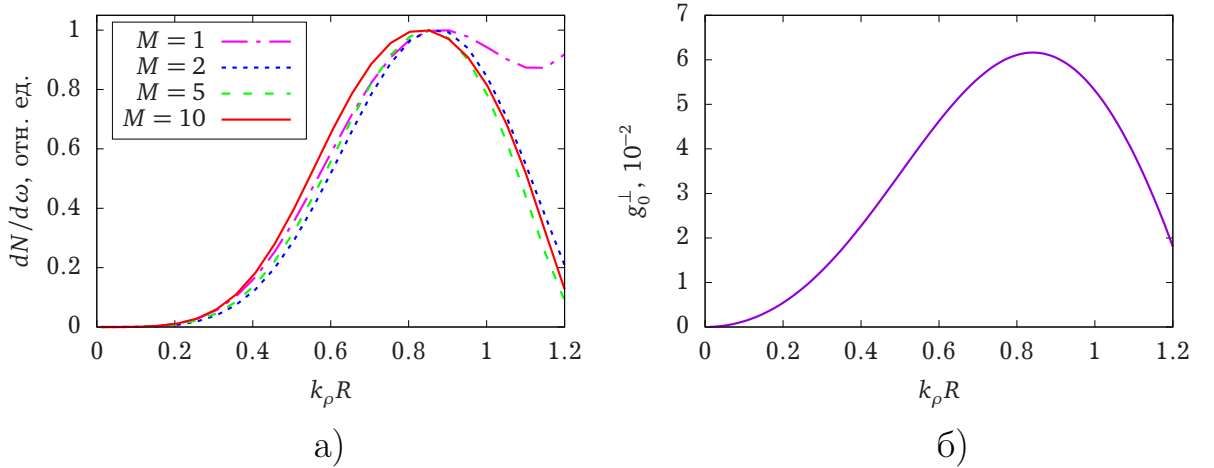


Рисунок 4.12. – Результаты расчетов для ТЕ-поляризованной компоненты излучения: а) зависимость интенсивности ТЕ-поляризованной компоненты излучения от величины $k_\rho R$, полученная при расчетах по формулам (4.15), (4.22) для кристаллических пластинок разной толщины (с разным M); б) эффективная диэлектрическая восприимчивость g_0^\perp кристалла, образованного металлическими нитями, как функция kR . Приняты следующие значения параметров: $kd = 5$, $\gamma = 100$

Обратим внимание, что при $M = 1$ выражения (4.21) и (4.22) существенно упрощаются: исчезает суммирование, а для коэффициентов F_0 , F_1 , F_1' становятся применимы явные формулы (3.33)-(3.35). На рисунке 4.13 показаны зависимости интенсивности излучения, возникающего при пролете частицы через одномерную решетку, от величины $k_\rho R$, рассчитанные для различных значений частот (различных kd). Все кривые здесь нормированы, так же как и на рисунке 4.11. Видно, что в случае достаточно малых kd ($kd \lesssim 10$) интенсивность ТЕ-поляризованной компоненты излучения имеет максимум в области значений $k_\rho R \approx 0.8..1.0$. При увеличении частоты положение максимума смещается в сторону более высоких значений $k_\rho R$, где излагаемая теория перестает быть справедливой (требуется учет следующего анизотропного члена в рассеянии). Для ТМ-поляризации наблюдается похожая картина, и хотя положение максимума зависит от kd немонотонно, в среднем при увеличении частоты он смещается в область больших значений $k_\rho R$.

Приведем здесь также для примера численные значения интенсивности излучения в области максимума. Максимальное значение $dN/d\omega$ на низкой частоте ($kd \approx 4.86$, $f \approx 115$ ГГц при $d = 2$ мм) составляет $dN/d\omega \approx 6.7 \cdot 10^{-16}$ с. Соответственно в узком интервале частот от $f_1 = 0.99f$ до $f_2 = 1.01f$ вблизи $f = 115$ ГГц один электрон излучает при пролете через одномерную решетку из нитей в среднем $N = 9 \cdot 10^{-4}$ фотонов. На более высоких частотах число излучаемых фотонов меньше, и, например, при $kd \approx 13.7$ ($f \approx 330$ ГГц)

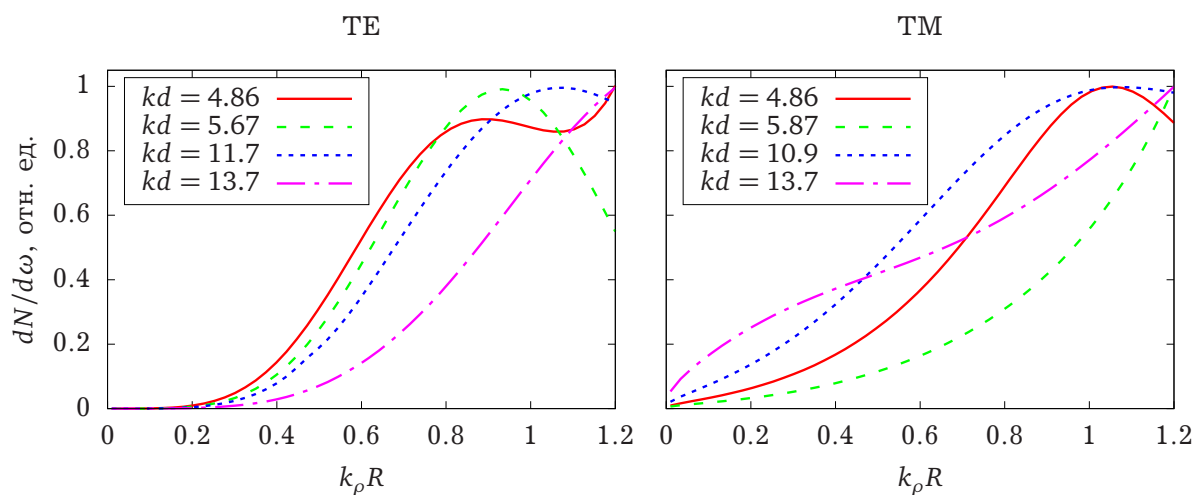


Рисунок 4.13. – Зависимости интенсивности излучения, возникающего при пролете заряженной частицы через одномерную решетку ($M = 1$) из нитей, от величины $k_\rho R$, на различных частотах. Лоренц-фактор частицы $\gamma = 100$

составляет в аналогичном интервале $N = 2.5 \cdot 10^{-5}$.

4.2.3 Черенковское и переходное излучение

Рассмотрим теперь более подробно различные случаи излучения, возникающего при равномерном движении заряженных частиц через образованный металлическими нитями кристалл. Прежде всего напомним, что в соответствии с результатами, полученными в предыдущем разделе, в таком кристалле может возникать черенковское излучение [1–А, 7–А]. Кроме того, при пересечении частицей границ “кристалл-вакуум” возникает ещё и переходное излучение. Воспользуемся для анализа приведенным выше выражением для спектрально-углового распределения переходного и черенковского излучения (4.24).

Для простоты будем считать, что кристалл имеет квадратную решётку ($a = b \equiv d$). Типичные зависимости величин g_0^\perp и g_0^\parallel для кристалла из металлических нитей от параметра $k_\rho R$, получаемые при расчете с помощью уравнения (3.46), представлены на рисунке 4.14.

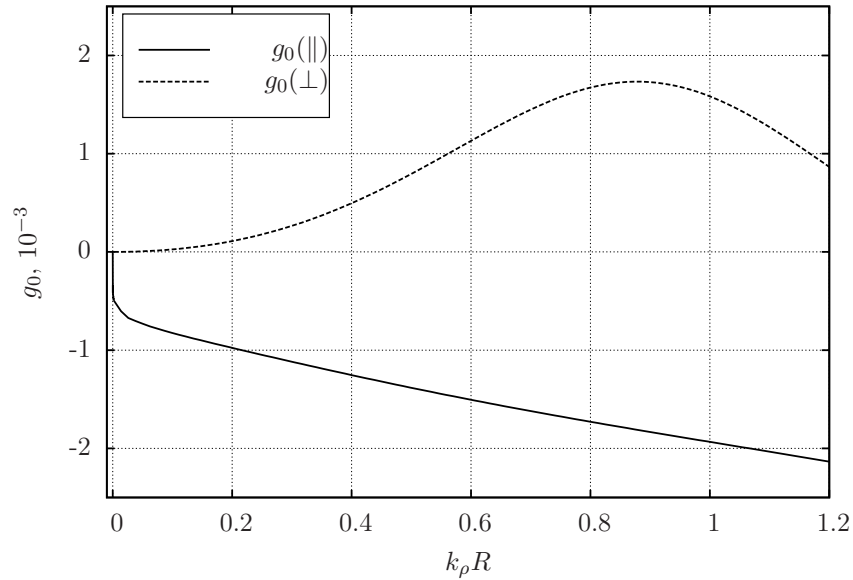


Рисунок 4.14. – Зависимость эффективной диэлектрической восприимчивости g_0 от параметра $k_\rho R$ для кристалла из металлических нитей с квадратной решеткой (падение волны на пластинку нормальное, $kd \approx 35.5$; при периоде кристалла, равном, например, $d = 2$ мм, это соответствует частоте излучения 0.85 ТГц)

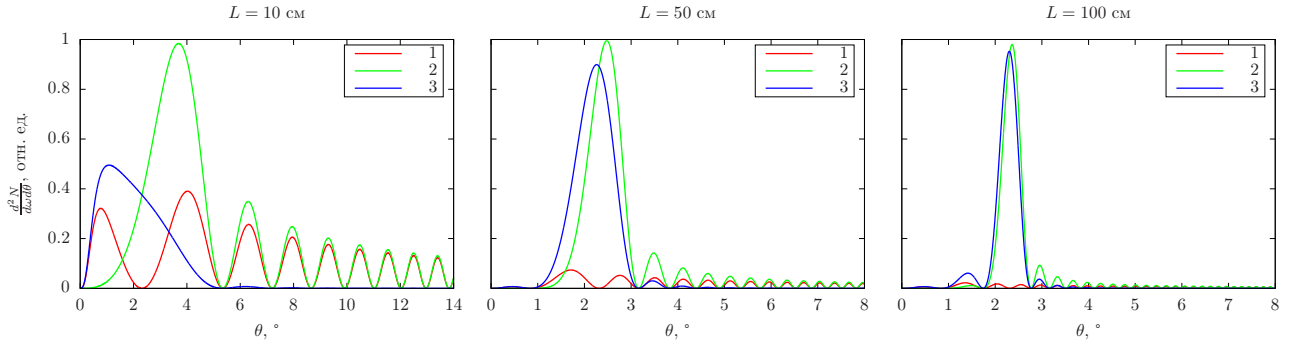
Видно, что для ТЕ-поляризованной волны $g_0 > 0$, т.е. показатель преломления кристалла для такой волны $n_\perp \approx 1 + \frac{1}{2}g_0^\perp > 1$. В случае, если скорость частицы меньше фазовой скорости ТЕ-волны в кристалле $v_\perp = c/n_\perp$, при пролете частицы через кристалл возникает только переходное излучение. Если же скорость частицы превышает фазовую скорость ТЕ-волны, величина $\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}$ может обращаться в ноль, и слагаемое формулы (4.24), содержащее

эту величину в знаменателе, будет расти с увеличением толщины кристалла. При достаточно больших L ($L \gg l_0 = \lambda\gamma^2$; l_0 – когерентная длина излучения в вакууме, λ – длина волны излучения) это слагаемое будет давать основной вклад в суммарную интенсивность излучения. Наблюдаемая картина соответствует обычному черенковскому излучению, возникающему при движении заряженной частицы в прозрачной среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде.

Следует однако отметить, что при значениях $\gamma \sim 10^2 \div 10^3$ и $\lambda \sim 0.3$ мм (ТГц-диапазон) когерентная длина l_0 может принимать достаточно большие значения в диапазоне от нескольких единиц до сотен метров (в оптическом диапазоне при $\gamma \sim 10^3$ и $\lambda \sim 500$ нм – порядка 0.5 м). Поэтому в общем случае при расчете спектрально-углового распределения необходимо учитывать все члены в формуле (4.24). Для примера на рисунке 4.15 проведено сравнение спектрально-угловых распределений черенковского и переходного излучения, полученных при учете всех слагаемых в квадратных скобках в формуле (4.24), и при учете только первого либо только второго слагаемого. Лоренц-фактор частицы в расчетах составлял $\gamma = 100$, что для электронов приблизительно соответствует энергии 50 МэВ; период кристалла $d = 2$ мм, частота излучения 0.85 ТГц, рассматривалось излучение ТЕ-поляризованной волны, а принятое значение $g_0^\perp \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$ соответствовало $k_p R \approx 0.9$ (см. рисунок 4.14). Видно, что для выбранных значений параметров расчеты по полной формуле (4.24), и с учетом в (4.24) только члена, пропорционального $(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})^{-1}$, дают практически одинаковые результаты только при толщине кристалла $L \gtrsim 1$ м. Приведенные на рисунке 4.15 (так же как и далее на рисунке 4.16 и 4.17) результаты допускают простое масштабирование: они остаются справедливы при одновременном изменении частоты и всех линейных размеров (так, чтобы произведение kd оставалось постоянным); конкретные значения периода и толщины кристалла выбраны на рисунке 4.15 исключительно для большей наглядности. Так, например, при уменьшении периода кристалла в 20 раз (так, что $d = 0.1$ мм, как в предыдущем разделе), и увеличении частоты до $0.85 \cdot 20 \approx 17$ ТГц толщина кристалла, при которой расчеты по полной формуле (4.24), и с учетом в (4.24) только члена, пропорционального $(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})^{-1}$, дают одинаковые результаты, составляет $L \approx 5$ см.

Для ТМ-поляризованной волны величина $g_0 < 0$ (см. рисунок 4.14), и знаменатель второго слагаемого в формуле (4.24) не может обращаться в ноль. Черенковское излучение в этом случае невозможно, а для анализа спектрально-углового распределения переходного излучения в любом случае необходимо учитывать все слагаемые в формуле (4.24).

Полная интенсивность излучения (без разделения вкладов черенковско-



Кривая 1 – учет только первого слагаемого в квадратных скобках в формуле (4.24), 2 – учет только второго слагаемого, 3 – учет всех членов. Приведена зависимость только от полярного угла θ (опущен поляризационный множитель $\sin^2 \varphi$). Лоренц-фактор частицы $\gamma = 100$, период кристалла $d = 2$ мм, частота излучения $f = 0.85$ ТГц, $l_0 = \lambda\gamma^2 \approx 3.5$ м, $g_0^\perp \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$.

Рисунок 4.15. – Спектрально-угловые распределения черенковского и переходного излучения в кристалле, образованном металлическими нитями, для ТЕ-поляризованной волны

го и переходного) может быть рассчитана путем численного интегрирования выражения (4.24) по угловым координатам и частоте. В качестве примера мы провели расчет интенсивности черенковского и переходного излучения в кристалле из металлических нитей, используя известные значения величин g_0 (рисунок 4.14). Для определенности толщина кристалла полагалась равной 10 см; скорость частицы (электрона) была перпендикулярна поверхности кристалла, $\gamma = 100$. Результаты расчета приведены на рисунке 4.16.

Из графика видно, что интенсивность переходного и черенковского излучения в кристалле из металлических нитей имеет максимум в области $k_\rho R \sim 1$, соответствующий максимальному значению величины g_0^\perp . В частности, при $k_\rho R \approx 0.9$ суммарная для двух поляризаций интенсивность излучения достигает величины $1.4 \cdot 10^{-2}$ фотонов/ТГц на частоте $f = 0.85$ ТГц. Тогда, например, в узком интервале частот от $f_1 = 0.99f$ до $f_2 = 1.01f$ ($\Delta f = 0.02f = 17$ ГГц) на каждый пролетающий через кристалл электрон будет излучаться в среднем $N_{tot} \sim 2.4 \cdot 10^{-4}$ фотонов. Разумеется, в более широком интервале полное число излучаемых одним электроном фотонов будет больше, например, при $\Delta f = 0.2f = 170$ ГГц $N_{tot} \sim 2.4 \cdot 10^{-3}$. Необходимо отметить, что интенсивность излучения будет существенно выше в случае частиц с большим зарядом ($Q > 1$), поскольку, в соответствии с (4.24), она пропорциональна Q^2 . Таким образом, если через тот же кристалл толщиной 10 см пролетает релятивистское ядро с зарядом $Q \sim 50$, то интенсивность излучения увеличится более чем на три порядка, и для $k_\rho R \sim 1$ составит более 1 фотона/ядро [61].

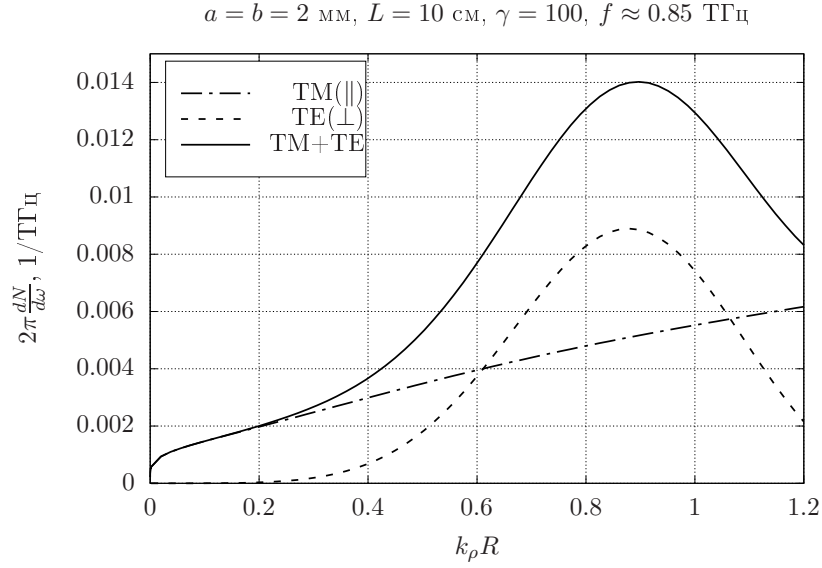


Рисунок 4.16. – Интенсивность переходного и черенковского излучения в кристалле, образованном металлическими нитями, в зависимости от величины $k_\rho R$. Показаны интенсивность излучения ТМ- и ТЕ-поляризованной волн, а также суммарная (для обеих поляризации) интенсивность. Расчеты проведены по формуле (4.24) с учетом всех членов

4.2.4 Параметрическое излучение

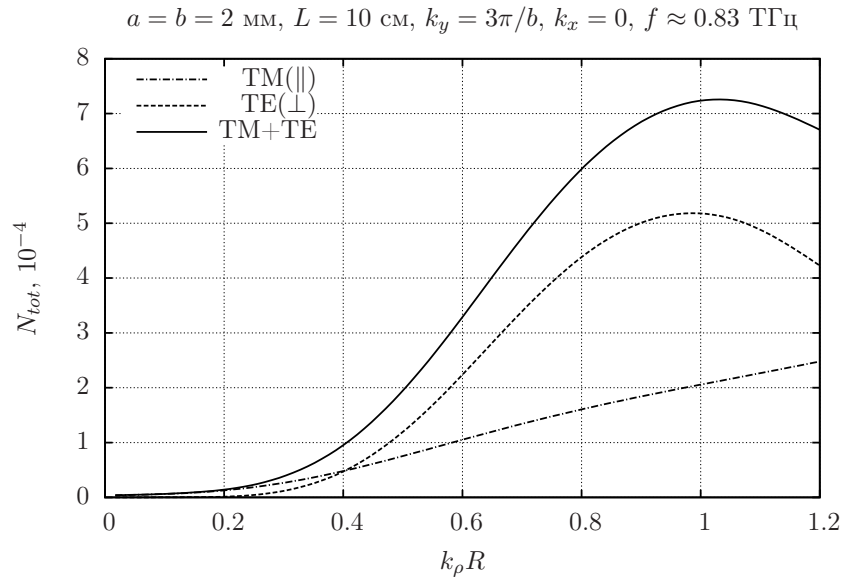
Перейдем теперь к анализу параметрического излучения в кристалле из металлических нитей. Для определенности рассмотрим излучение в случае двухволновой симметричной дифракции в геометрии Лауэ (см. рисунок 4.9(а,б)). При этом вектор обратной решётки $\boldsymbol{\tau} = \frac{2\pi m}{d} \mathbf{e}_y$, где m – целое число, а угол Брэгга θ_B связан с k_B следующим образом:

$$\sin \theta_B = \frac{\tau}{2k_B} = \frac{\pi m}{kd}. \quad (4.27)$$

Для примера положим $m = 3$ и воспользуемся приведенными выше значениями эффективных поляризуемостей g_τ (рисунок 3.6 справа); будем также сначала считать, что заряд пролетающей через кристалл частицы $Q = 1$ (электрон, протон и т.д.). Расчет интенсивности проведем с помощью выражений (4.26).

Результаты численного интегрирования этих выражений по частоте и угловым координатам для двух возможных поляризаций приведены на рисунке 4.17. Видно, что интенсивность излучения для ТМ-поляризации с увеличением $k_\rho R$ монотонно растёт и достигает при $k_\rho R = 1.2$ значения $N_\parallel \approx 2.5 \cdot 10^{-4}$ фотонов/электрон. При больших $k_\rho R$ существенно возрастает также и интенсивность излучения ТЕ-поляризованной волны; в рассматриваемом случае уже при $k_\rho R \gtrsim 0.4$ она начинает превышать интенсивность излучения

для ТМ-поляризации, а при $k_\rho R \approx 1$ достигает максимального значения $N_\perp \approx 5 \cdot 10^{-4}$ фотонов/электрон. Суммарная (для двух поляризаций) интенсивность излучения, как видно из рисунка 4.17, достигает максимума $N_{tot} \approx 7 \cdot 10^{-4}$ фотонов/электрон также при $k_\rho R \approx 1$, что для выбранных параметров кристалла (период 2 мм) соответствует радиусу нитей $R \approx 65$ мкм. Сделанные выводы остаются справедливыми и при уменьшении всех линейных размеров (периодов кристалла, радиуса нитей) и соответствующем увеличении частоты, вплоть до инфракрасного и даже оптического диапазона. Необходимые для этого кристаллы из нитей (трубок) с размерами, находящимися в нанометровом диапазоне, в настоящее время активно исследуются [91]; отдельный пример по расчету излучения в оптическом диапазоне приведен далее в пункте 4.2.6.



Для расчета использованы значения g_τ приведенные на рисунке 3.6; $kd \approx 34.6$, что при периоде кристалла $d = 2$ мм соответствует частоте излучения 0.83 ТГц.

Рисунок 4.17. – Зависимость интенсивности параметрического излучения (числа фотонов, излучаемых при пролете одного электрона через кристалл) от параметра $k_\rho R$

Обратим внимание, что при больших $k_\rho R$ вклады в суммарную интенсивность ТЕ- и ТМ-поляризованной волн могут быть сравнимыми (в нашем случае при $k_\rho R \sim 1$ вклад ТЕ-волны вообще является доминирующим), тогда как при $k_\rho R \ll 1$ основной вклад в интенсивность излучения получается за счет ТМ-поляризованной волны. Это можно видеть и на графиках углового распределения параметрического излучения, приведенных на рисунке 4.18. С ростом параметра $k_\rho R$ угловое распределение существенно меняется: если при $k_\rho R \ll 1$ оно имеет вид, показанный на рисунке 4.18 слева, то при увеличении $k_\rho R$, благодаря тому, что интенсивности ТЕ- и ТМ-поляризованной

волн становятся сравнимыми, угловое распределение сначала становится более симметричным (центральный график на рисунке 4.18), а затем, когда основная генерация начинает происходить на ТЕ-волне, принимает вид, показанный на рисунке 4.18 справа. Отметим, что при больших углах Брэгга ТЕ-поляризованная волна может давать заметный вклад в суммарную интенсивность излучения даже в случае $k_\rho R \ll 1$, поскольку коэффициент f_0^\perp не равен нулю (этим рассматриваемая ситуация существенно отличается от параметрического рентгеновского излучения, где π -поляризованная волна вообще отсутствует при $2\theta_b = 90^\circ$ [2]).

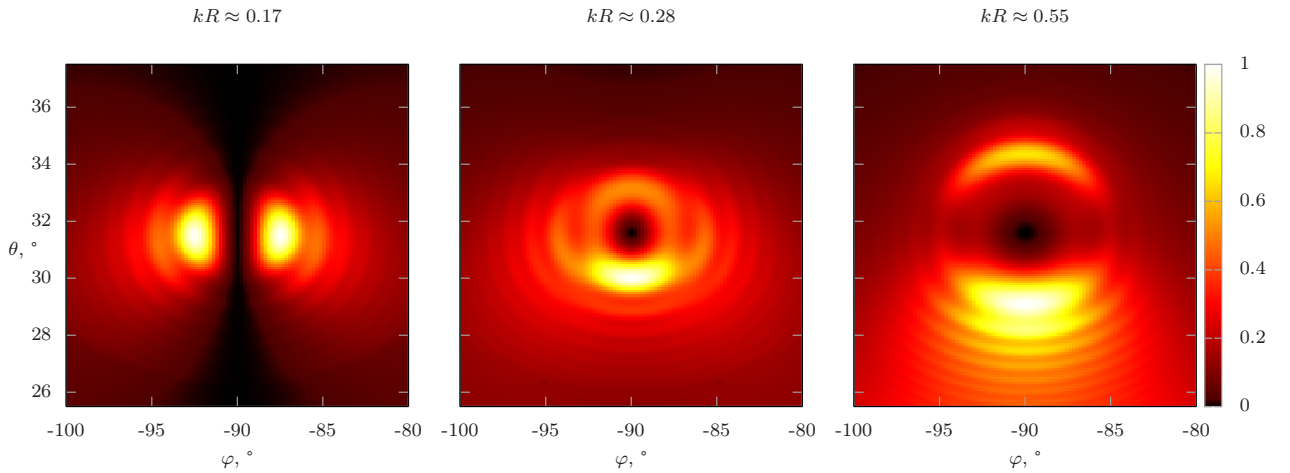


Рисунок 4.18. – Угловое распределение (суммарное для двух поляризаций) параметрического излучения в направлении дифракции при разных значениях $k_\rho R$. Толщина кристалла $L = 50$ см, лоренц-фактор $\gamma = 100$ (соответствует энергии электрона $E = 50.5$ МэВ)

Поскольку длина поглощения фотона L_{abs} в рассматриваемом кристалле велика (например, в случае нитей из меди расчет с помощью дисперсионного уравнения дает $\text{Im } g_0 \sim 8.5 \cdot 10^{-7}$, что соответствует $L_{abs} \sim 10^2$ м на частоте 0.83 ТГц), то полную интенсивность излучения можно повысить, увеличивая толщину кристалла. Для примера на рисунке 4.19 показана рассчитанная зависимость интенсивности параметрического излучения в выбранной геометрии от толщины кристалла при различных значениях $k_\rho R$. Видно, что с увеличением L интенсивность излучения возрастает, и, например, для $k_\rho R \sim 1$ и $L = 1$ м превышает $6 \cdot 10^{-3}$ фотонов/электрон. При этом для выбранных параметров кристалла интенсивность излучения ТЕ-поляризованной волны приблизительно в два раза превышает интенсивность для ТМ-поляризованной волны. Подчеркнем ещё раз, что при малых $k_\rho R$ почти все излучение происходит на ТМ-волне, что подтверждается верхним графиком на рисунке 4.19.

Заметим, что в проведенном рассмотрении никак не учитывалось многократное рассеяние частиц в кристалле, которое для легких частиц (элек-

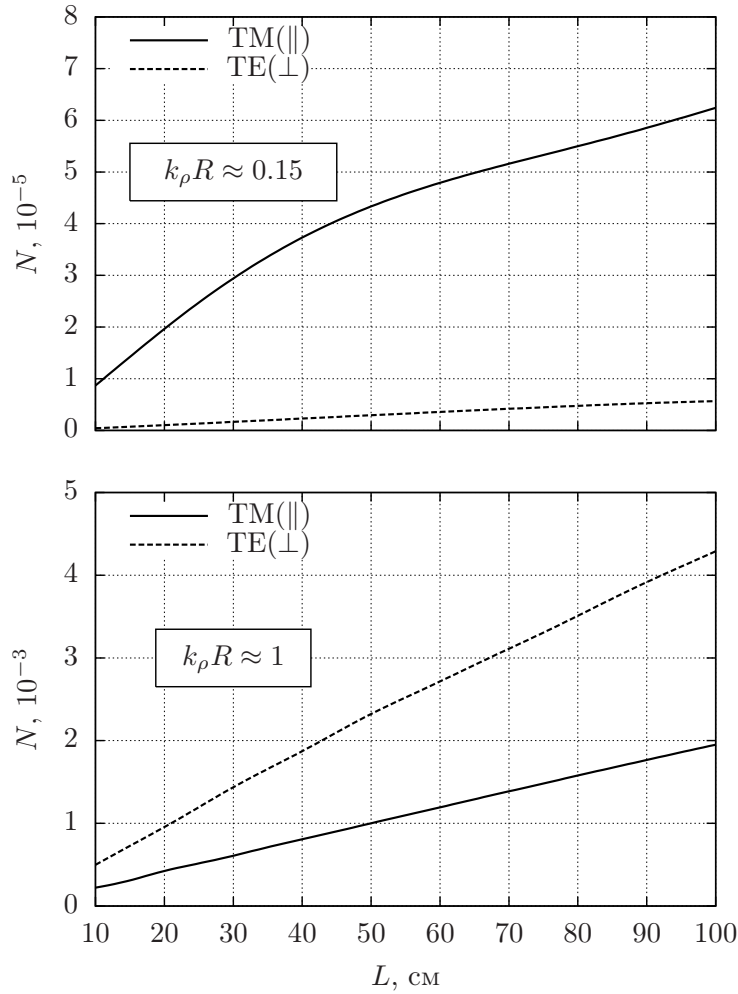


Рисунок 4.19. – Рассчитанная зависимость интенсивности параметрического излучения от толщины кристалла для двух состояний поляризации при различных значениях $k_\rho R$

тронов, позитронов) может оказаться существенным и сильно повлиять на процессы излучения. Избежать такого влияния можно, если частица будет двигаться через сделанную в кристалле щель, либо параллельно поверхности кристалла. В этом случае, если расстояние от частицы до поверхности кристалла d удовлетворяет условию $d < \frac{\lambda}{4\pi}\beta\gamma$, процессы излучения будут проходить так же, как в случае сплошного кристалла [3, 17]. В приведенном примере при $f = 0.83$ THz и $\gamma = 100$ получим для d вполне приемлемое значение $d \approx 3$ мм.

4.2.5 Излучение электронного сгустка

Пучки частиц высоких энергий, генерируемые ускорителями, чаще всего состоят из коротких сгустков частиц (банчей), следующих друг за другом с

определенной частотой. Современные ускорители способны генерировать релятивистские электронные пучки, типичная длительность сгустков t_b в которых может составлять менее 10^{-13} с (вплоть до 10^{-15} с), при числе электронов в сгустке $N_e \sim 10^9$ и более [127–129]. Такие компактные (с размерами много меньше длины волны) сгустки могут излучать когерентно (как одна частица с зарядом $Q = N_e$), и, следовательно, можно ожидать существенного – в N_e^2 раз – увеличения интенсивности параметрического излучения при переходе от одиночных электронов к сгусткам [61].

В соответствии с результатами [109, 110] спектрально-угловое распределение фотонов $\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}$, испускаемых движущимся через кристалл сгустком частиц, связано со спектрально-угловым распределением фотонов $\frac{d^2 N_1}{d\omega d\Omega}$, испускаемых движущейся через кристалл одиночной частицей, следующим образом:

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = N_e \frac{d^2 N_1}{d\omega d\Omega} + \frac{d^2 N_1}{d\omega d\Omega} \left| \int e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \right|^2, \quad (4.28)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ – плотность сгустка, $N_e = \int \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$ (интегрирование проводится по всему объему сгустка); разбросом скоростей частиц в сгустке пренебрегается. Если направление оси z прямоугольной декартовой системы координат совпадает с направлением скорости сгустка \mathbf{v} , то вектор \mathbf{K} в (4.28) для параметрического излучения вперёд равен $\mathbf{K} = (\mathbf{k}_\perp, \omega/v)$, а для излучения в направлении дифракции $\mathbf{K} = ((\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})_\perp, \omega/v)$, где индексом “ \perp ” обозначены перпендикулярные к оси z составляющие векторов.

Во многих случаях плотность частиц в сгустке с хорошей точностью может быть описана нормальным распределением

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{N_e}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma_\perp^2 \sigma_z} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{2\sigma_\perp^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right), \quad (4.29)$$

где среднеквадратичные отклонения σ_\perp и σ_z определяют размеры сгустка в поперечном и продольном (по отношению к направлению его скорости) направлениях соответственно. Подобные сгустки используются, например, для генерации излучения в лазерах на свободных электронах [130, 131]. Подставляя выражение для $\rho(\mathbf{r})$ в (4.28), получим

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = N_e \frac{d^2 N_1}{d\omega d\Omega} + N_e^2 \frac{d^2 N_1}{d\omega d\Omega} \exp\left(-K_\perp^2 \sigma_\perp^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \sigma_z^2\right). \quad (4.30)$$

Проведем для примера оценку мощности параметрического излучения, если через рассмотренный кристалл из металлических нитей пролетает релятивистский сгусток электронов. В соответствии с приведенными в [131] данными ускоритель строящегося в Швейцарии рентгеновского лазера на электронах SwissFEL в одном из режимов способен генерировать электронные

пучки, состоящие из сгустков с $N_e \approx 1.25 \cdot 10^9$, $\sigma_z \approx 9$ мкм (соответствует длительности сгустка 30 фс), $\sigma_{\perp} \approx 80$ мкм. Ускоритель ТТХ в университете Цинхуа (Китай) может генерировать сгустки с ещё большим числом электронов $N_e \approx 4.4 \cdot 10^9$ длительностью 1 пс ($\sigma_z \approx 130$ мкм) [132], а ускоритель КЕК LUCX (Япония) – сгустки с $N_e \approx 3.75 \cdot 10^8$ длительностью 250 фс ($\sigma_z \approx 30$ мкм) [133].

Для конкретности используем при оценках параметры сгустков ускорителя SwissFEL. Из приведенных на рисунке 4.18 графиков можно видеть, что ширина угловых распределений параметрического излучения в выбранной геометрии составляет порядка 10° . Отсюда оценивается максимальное значение $K_{\perp max} \approx \frac{\omega}{c} \sin 10^\circ$ и, соответственно, минимальное значение экспоненциального множителя во втором слагаемом в (4.30): $\exp(-K_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \sigma_z^2) \approx 0.92$ (здесь учтено, что частота излучения в приведенном в разделе 4.2.4 примере $f = \omega/2\pi \approx 0.83$ ТГц). Таким образом, основной вклад в суммарную интенсивность вносит второе слагаемое в (4.30), т.е. электроны сгустка излучают когерентно. Тогда мгновенная (пиковая) мощность параметрического излучения будет составлять $P \approx 0.92 \frac{N_{tot} N_e^2 \hbar \omega}{\Delta t}$, где Δt – время пролета сгустка через кристалл. Подставляя сюда найденное максимальное значение для кристалла толщиной 10 см $N_{tot} \approx 7 \cdot 10^{-4}$, получим $P \approx 1.7$ кВт (излученная энергия $W \approx 5.5 \cdot 10^{-7}$ Дж). С помощью рисунка 4.19 легко найти, что при увеличении толщины кристалла в 10 раз (до 1 м) излучаемая энергия также увеличится почти в 10 раз и составит $W \approx 4.9$ мкДж (при этом увеличится длительность импульса излучения, а мгновенная мощность останется приблизительно прежней). Отметим, что при увеличении числа электронов в сгустке мгновенная мощность излучения быстро растёт, и, например, при $N_e \sim 10^{11}$ будет составлять уже десятки МВт. На сегодняшний день известно о получении сгустков протонов длительностью всего в десятки фемтосекунд с числом частиц порядка 10^{13} [121]. При пролете таких сгустков через кристалл из нитей становится возможным получать импульсы ТГц-излучения с рекордной мгновенной мощностью в сотни ГВт.

Частота следования электронных сгустков в ускорителе SwissFEL составляет 100 Гц, так что средняя мощность излучения в рассмотренном примере будет относительно невысокой (0.49 мВт при толщине кристалла 1 м). Многие современные ускорители могут генерировать близкие по параметрам сгустки электронов с гораздо более высокой частотой повторения. Например, ускоритель JLab ERL в США способен производить электронные сгустки энергией до 40 МэВ с $N_e \approx 6.25 \cdot 10^8$ длительностью менее 500 фс ($\sigma_z \approx 64$ мкм) с частотой повторения 37.4 МГц [10]. Ускоритель КЕК sERL (Япония) может работать с частотой повторения 162.5 МГц (энергия 20 МэВ, $2.5 \cdot 10^8$

Таблица 4.2. – Интенсивность параметрического излучения электронных сгустков в кристалле из металлических нитей для различных ускорителей. Периоды кристалла $a = b = 2$ мм, $kR \approx 1$, $f \approx 0.83$ ТГц, $L = 10$ см.

	SwissFEL	КЕК сERL	JLab ERL
N_e	$1.25 \cdot 10^9$	$2.5 \cdot 10^8$	$6.25 \cdot 10^8$
t_b	< 30 фс	< 100 фс	< 500 фс
σ_z	9 мкм	13 мкм	64 мкм
σ_{\perp}	80 мкм	15 мкм	100 мкм
W	$5.5 \cdot 10^{-7}$ Дж	$2.3 \cdot 10^{-8}$ Дж	$4.1 \cdot 10^{-8}$ Дж
P	1.7 кВт	69 Вт	120 Вт
f_{rep}	100 Гц	162.5 МГц	37.4 МГц
$\langle P_1 \rangle$	$5.5 \cdot 10^{-5}$ Вт	3.7 Вт	1.5 Вт
$\langle P_2 \rangle$	$4.9 \cdot 10^{-4}$ Вт	34 Вт	13 Вт

Примечание - Обозначения в таблице: t_b – длительность сгустка, W – энергия, излучаемая одним сгустком, P – мгновенная мощность излучения, f_{rep} – частота следования сгустков в электронном пучке, $\langle P_1 \rangle$ – средняя мощность излучения, генерируемого электронным пучком, $\langle P_2 \rangle$ – средняя мощность излучения в случае, когда длина кристалла составляет не 10 см, а 1 м.

электронов в сгустке длительностью менее 100 фс) [11, 12]. Оценки, подобные приведенным выше, показывают, что в рассмотренном кристалле ($L = 10$ см) средняя мощность параметрического излучения в ТГц-диапазоне, генерируемого электронными пучками данных ускорителей, будет составлять около 3.7 Вт для КЕК сERL и 1.5 Вт для JLab ERL. Для большей наглядности результаты оценок мощности сведены в таблицу 4.2.

Приведем здесь также оценку мощности переходного и черенковского излучения. Ширина спектрального пика параметрического излучения $\Delta\omega/\omega \sim \sqrt{\gamma^{-2} + |g_0|} \approx 0.04$ [134]. Используя приведенные в разделе 4.2.3 результаты и параметры ускорителя SwissFEL, получим, что один электрон, пролетающий через кристалл толщиной 10 см, генерирует в таком же интервале частот в среднем $N_{tot} \approx 1.4 \cdot 10^{-2} \cdot 0.04 = 5.6 \cdot 10^{-4}$ фотонов черенковского и переходного излучения; это соответствует мгновенной мощности около 1.4 кВт.

Таким образом, можно сделать вывод, что интенсивность переходного и черенковского, а также параметрического излучения в ТГц-диапазоне для кристалла, образованного металлическими нитями, является достаточной не только для экспериментального наблюдения, но и для возможных практических применений [61], например, для создания источников мощных импульсов ТГц-излучения.

4.2.6 Оптический диапазон

В настоящее время активно исследуется возможность применения периодических структур, образованных параллельными металлическими нитями, не только в микроволновой и ТГц областях электромагнитного спектра, но и на более высоких частотах — в инфракрасном и видимом оптическом диапазонах. Разрабатываются технологии создания структур, в которых диаметр “нитей” составляет всего десятки нанометров, а период структуры — сотни нм; сами “нити” при этом чаще всего изготавливаются из благородных металлов — золота или серебра. В работе [135], например, экспериментально удавалось получать структуры с золотыми нитями диаметром около 20 нм и периодом 70 нм, в работе [136] — с диаметром 10–40 нм и периодом 100–170 нм, и т.д. (см. ссылки на литературу в обзоре [91]).

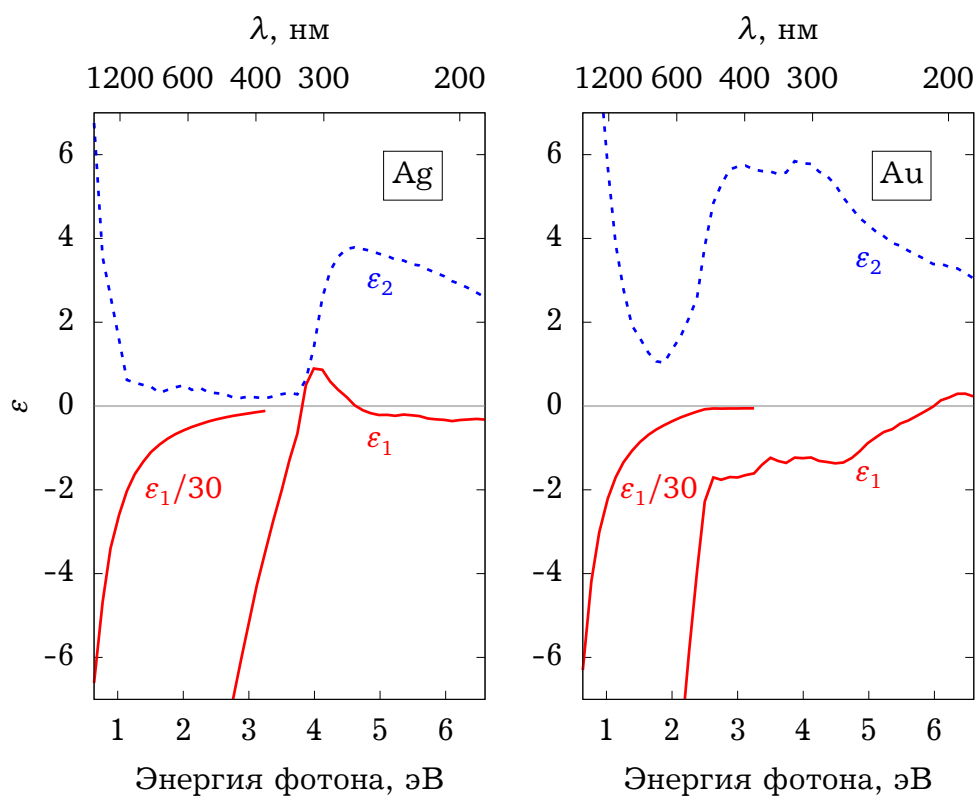


Рисунок 4.20. – Экспериментальные значения комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ золота и серебра в оптическом диапазоне частот (данные из работы [120])

В качестве примера приведем результаты расчета параметрического и черенковского излучения в кристаллах, рассчитанных на применение в инфракрасном и оптическом диапазонах. Выберем не слишком рекордные геометрические параметры кристалла: пусть радиус составляющих кристалл нитей $R = 50$ нм, а периоды $a = b \equiv d = 500$ нм. Рассмотрим также два варианта материала нитей: золото и серебро. Для расчетов воспользуемся экспери-

ментальными значениями комплексной диэлектрической проницаемости этих металлов, приведенными в работе [120] (рисунок 4.20).

На рисунке 4.21 приведены рассчитанные дисперсионные характеристики рассматриваемого кристалла в первой полосе пропускания для ТЕ- и ТМ-поляризации (случай нормального падения волны на кристалл). Различия между золотыми и серебряными нитями здесь не делается, поскольку действительные части корней дисперсионного уравнения q_z в обоих случаях практически не отличаются. Характерно, что даже в инфракрасном и видимом оптическом диапазонах показатель преломления для ТЕ-поляризованной волны в кристалле из металлических нитей превышает единицу. Это можно легко видеть из графика на рисунке 4.21: вся дисперсионная кривая для ТЕ-волны лежит ниже прямой $\omega = q_z c$, т.е. для всех корней дисперсионного уравнения $q_{z\mu}$ в этом случае справедливо соотношение $n_\mu = q_{z\mu}/k = q_{z\mu}c/\omega > 1$.

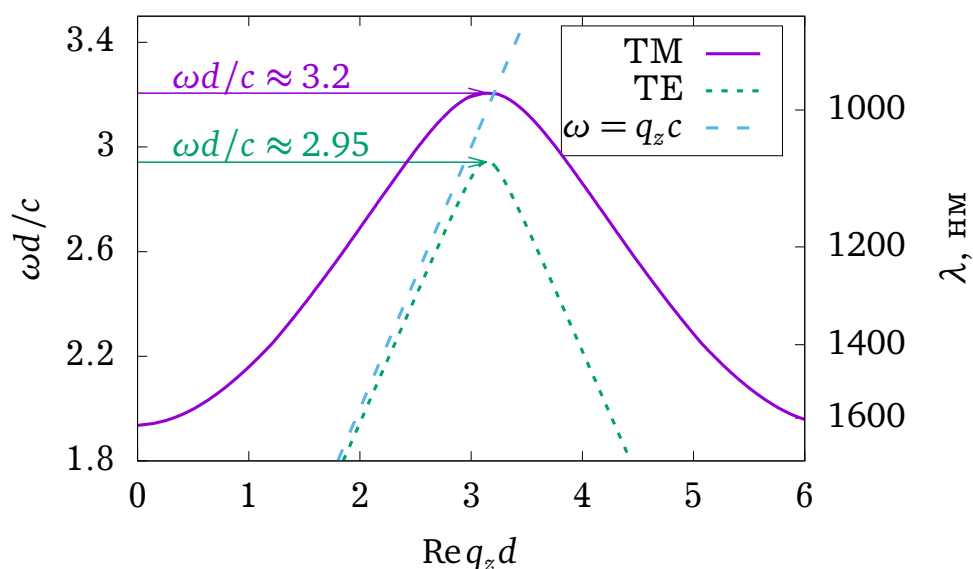


Рисунок 4.21. – Дисперсионные кривые для кристалла, образованного параллельными золотыми или серебряными нитями, в первой полосе пропускания. Радиус нитей $R = 50$ нм, период кристалла $d = 500$ нм

Пусть через такой кристалл перпендикулярно к его поверхности пролетает заряженная частица (электрон). Для определенности будем считать лоренц-фактор частицы равным $\gamma = 100$. Помимо переходного излучения, возникающего при пересечении частицей поверхностей кристалла, на частотах в области первой полосы пропускания и вблизи её верхней границы в данном кристалле возможно также черенковское излучение (ТЕ-поляризованное), и параметрическое излучение в геометрии Брэгга (угол Брэгга $\theta_B = 90^\circ$).

Пусть кристалл состоит из $M = 400$ слоев нитей, т.е. толщина кристаллической пластинки $L = Md = 0.2$ мм. На рисунке 4.22 приведены значения $\frac{dN}{d\omega}$ для кристаллов, состоящих из золотых и серебряных нитей, полученные ин-

тегрированием выражений (4.15), (4.21)-(4.22) по угловым переменным. Поскольку в оптическом диапазоне часто принято работать с длиной волны, а не с частотой, для удобства на рисунке 4.23 приведены также соответствующие значения $\frac{dN}{d\lambda}$.

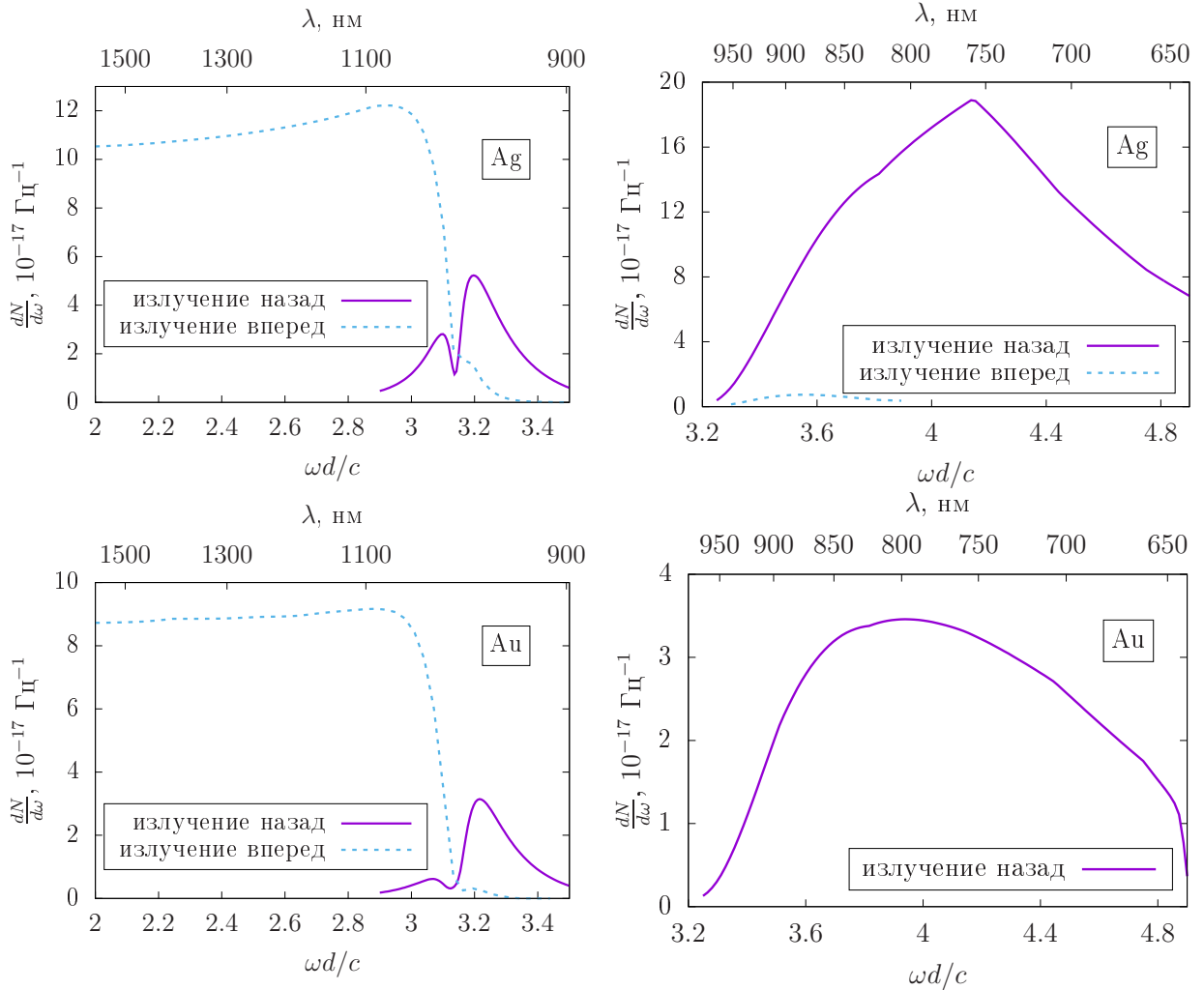


Рисунок 4.22. – Интенсивность параметрического излучения вперед и в направлении дифракции (т.е. назад) в кристаллах из золотых и серебряных нитей. Графики слева – ТЕ-поляризация, справа – ТМ-поляризация; толщина кристалла $L = 0.2$ мм ($M = 400$), период $d = 500$ нм, радиус нитей $R = 50$ нм, лоренц-фактор частицы $\gamma = 100$

Из графиков (рисунки 4.22-4.23) можно видеть, во-первых, что, хотя общий характер зависимостей $\frac{dN}{d\omega}$ от частоты в кристаллах из золотых и серебряных нитей одинаков, интенсивность излучения в первом случае оказывается ниже (для ТМ-поляризации – существенно ниже). Это связано просто с большим поглощением в кристалле из золотых нитей.

Второе, на что следует обратить внимание – существенно различное поведение ТЕ- и ТМ-поляризованных компонент излучения. В случае ТЕ-поляризации излучение происходит в основном вперед, причем внутри первой

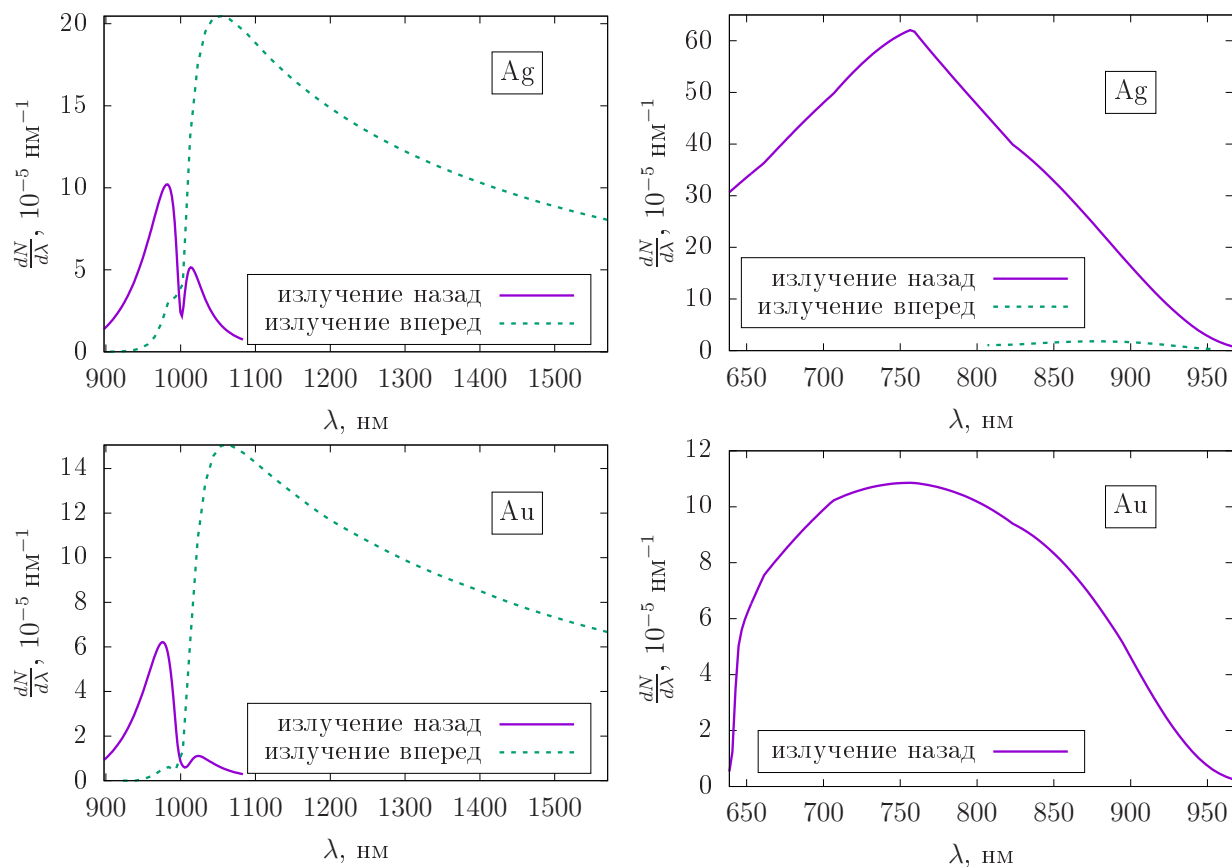


Рисунок 4.23. – Интенсивность параметрического излучения вперед и в направлении дифракции (т.е. назад) в кристаллах из золотых и серебряных нитей. Графики слева – ТЕ-поляризация, справа – ТМ-поляризация; толщина кристалла $L = 0.2$ мм ($M = 400$), период $d = 500$ нм, радиус нитей $R = 50$ нм, лоренц-фактор частицы $\gamma = 100$

полосы пропускания интенсивность излучения $\frac{dN}{d\omega}$ слабо зависит от частоты. Это соответствует обычному черенковскому излучению в пластинке с показателем преломления $n \approx 1.027$ (находится из дисперсионного уравнения). При увеличении частоты и приближении её к верхней границе первой полосы пропускания (т.е. к области двухволновой дифракции) интенсивность излучения вперед несколько возрастает и появляется заметный пик в излучении назад (в направлении дифракции). При дальнейшем увеличении частоты (выше границы полосы пропускания) интенсивность излучения вперед начинает быстро падать, а в интенсивности излучения назад появляется ещё один, основной максимум.

Для ТМ-поляризации излучение внутри первой полосы пропускания практически не наблюдается (черенковское излучение здесь невозможно, поскольку показатель преломления меньше единицы). При приближении частоты к верхней границе полосы пропускания, и дальнейшем её увеличении возникает параметрическое излучение. Так же как и для ТЕ-поляризации, интенсивность излучения достигает максимума на некотором расстоянии от границы полосы пропускания, после чего начинает падать. Однако в рассматриваемом примере лишь пренебрежимо малая доля излучения направлена вперед, основная же его часть происходит в направлении дифракции. Максимальная интенсивность при этом существенно зависит от материала нитей. Из рисунка 4.22 видно, что в случае нитей из серебра максимальная интенсивность ТМ-поляризованного параметрического излучения назад оказывается приблизительно в 1.5 раза выше, чем интенсивность черенковского излучения вперед (ТЕ-поляризованного). Обратим внимание также на то, что максимальные значения интенсивности для ТМ- и ТЕ-поляризации наблюдаются на разных частотах (частота ТМ-поляризованной компоненты выше). Так, при выбранных параметрах кристалла максимальное значение $\frac{dN}{d\lambda}$ для ТМ-поляризации приходится на длину волны $\lambda \approx 750$ нм, а для ТЕ-поляризации – на длину волны $\lambda \approx 1050$ нм.

С помощью графиков (рисунок 4.23) можно оценить количество фотонов, испускаемых при пролете одного электрона через рассматриваемую кристаллическую пластинку. Так, например, для ТМ-поляризации в узком спектральном интервале $\lambda = 750 \pm 5$ нм в кристалле с нитями из серебра будет излучаться в среднем $N = 6 \cdot 10^{-3}$ фотона/электрон. Напомним здесь, что интенсивность излучения пропорциональна квадрату заряда частицы, так что для частиц с большим зарядом (релятивистских ядер) квантовый выход излучения может быть существенно выше, и, так же как и в примерах для ТГц-диапазона, составлять порядка 1 фотона/ядро (при $Q \sim 15$).

4.3 Выводы к главе 4

Предметом исследования в главе было черенковское, переходное и параметрическое излучение, образуемое при пролете релятивистских заряженных частиц через фотонный кристалл, образованный параллельными металлическими нитями. Впервые установлено, что показатель преломления такого фотонного кристалла для волны с перпендикулярной нитям поляризацией (TE-поляризацией) больше 1. Как следствие, при движении через такую структуру пучка заряженных частиц может наблюдаться эффект Вавилова-Черенкова; этот результат для структуры из металлических нитей получен впервые. Проведены оценки интенсивности черенковского излучения при типичных параметрах электронных пучков в современных ускорителях.

Также в главе впервые получены выражения для спектрально-углового распределения черенковского, переходного и параметрического излучения в рассматриваемом кристалле, справедливые в условиях, когда радиус нитей сравним с длиной волны излучения ($kR \sim 1$). Численные решения полученных уравнений для выбранной геометрии кристалла подтверждают выводы [61] о том, что интенсивность излучения возрастает при увеличении радиуса нитей R и достигает максимального значения в области $kR \sim 1$. При этом существенный вклад в суммарную интенсивность параметрического излучения вносит TE-поляризованная волна, тогда как в случае $kR \ll 1$ излучение оказывается практически полностью TM-поляризованным.

В главе рассмотрено несколько конкретных примеров, для которых определено значение интенсивности излучения в области максимума. Проведенные оценки показали, что при типичных параметрах современных ускорителей мощность излучения достигает значительных величин и, таким образом, параметрическое и черенковское излучение в кристалле из металлических нитей может представлять интерес для различных практических применений, в том числе для создания источников мощных импульсов ТГц-излучения.

ГЛАВА 5

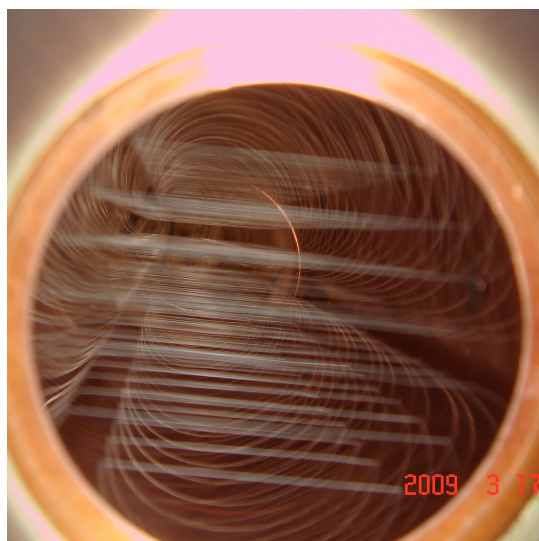
РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ОДНОМЕРНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ

В данной главе рассматривается фотонный кристалл, расположенный внутри волновода круглого сечения. Исследуется радиационная неустойчивость электронного пучка в таком кристалле, в частности, анализируется зависимость инкремента неустойчивости от тока пучка и от частоты вблизи точки вырождения корней дисперсионного уравнения. Проводятся численные расчеты величины инкремента для различных параметров системы. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [2–А, 4–А, 19–А].

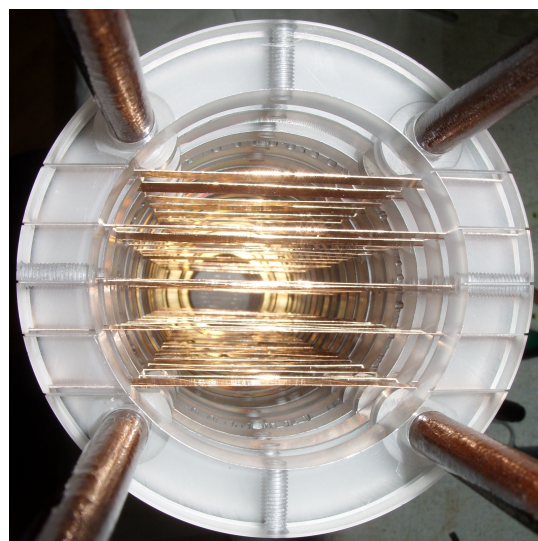
5.1 Исследования индуцированного излучения в фотонных кристаллах в Институте ядерных проблем БГУ

Для решения актуальной задачи создания мощных источников излучения, работающих в различных спектральных диапазонах, используются не только различные механизмы спонтанного излучения, но и индуцированное излучение. В Институте ядерных проблем Белорусского государственного университета в 2000-х годах впервые в мире были созданы объемные лазеры на свободных электронах и генераторы на основе фотонных кристаллов [6–А, 8–А, 9–А, 62, 63, 137]. В проводимых экспериментах для генерации излучения использовались сильноточные электронные пучки с энергией до 350 кэВ и токами до 6 кА. Фотонные кристаллы были образованы параллельными металлическими проволочками, либо фольгами, расположенными внутри волноводов круглого сечения (рисунки 5.1–5.2).

В экспериментах регистрировалось излучение в микроволновом диапазоне частот. В зависимости от конфигурации кристаллов частота излучения менялась в диапазоне от 1.5 до 12 ГГц. Была продемонстрирована возможность осуществления генерации в исследуемых структурах на частотах, расположенных ниже частоты отсечки пустого волновода такого же диаметра, и соответствующая возможность уменьшения поперечных размеров генераторов. Достигнутые импульсные мощности излучения составили несколько МВт. В



а)



б)

Рисунок 5.1. – Внешний вид исследовавшихся кристаллов (поперечное сечение): а) – кристалл из металлических нитей, б) – кристалл из металлических фольг

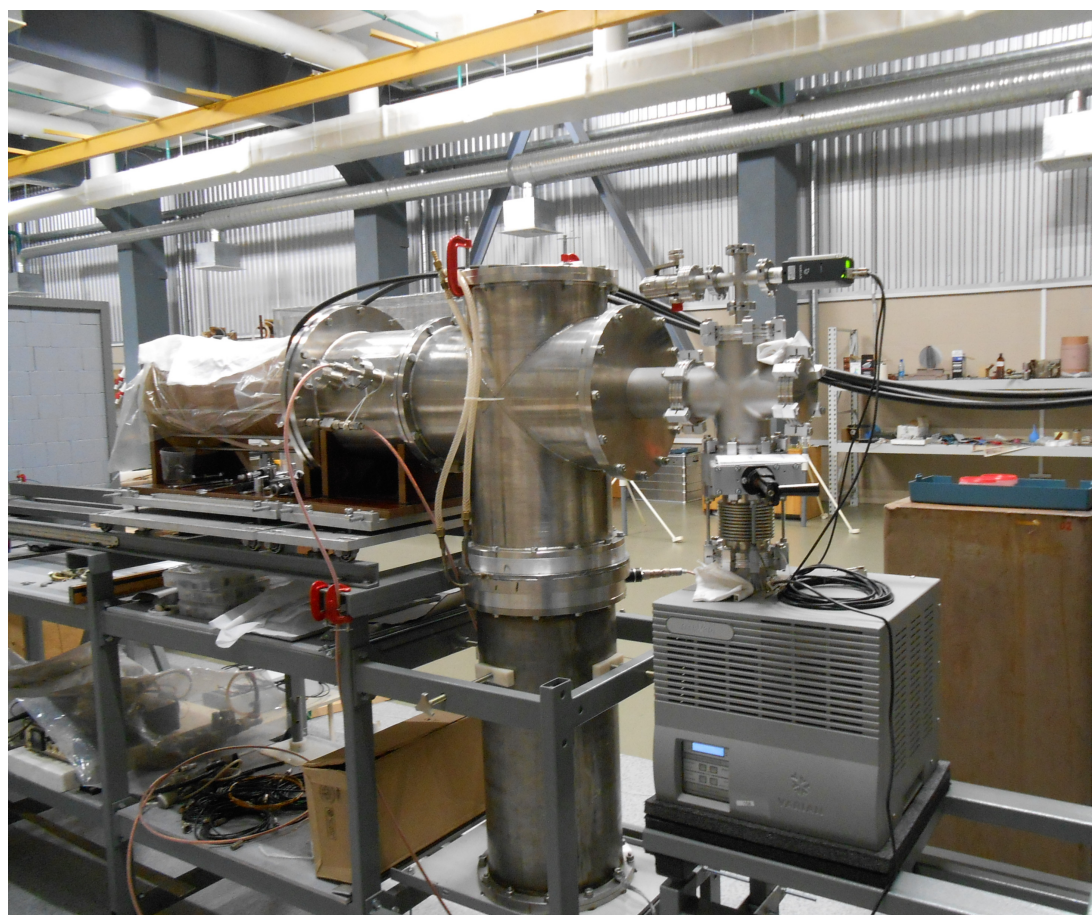


Рисунок 5.2. – Фотография экспериментальной установки. Используемый сильноточный ускоритель позволял проводить через кристалл электронные пучки с энергией до 350 кэВ и токами до 6 кА

настоящее время исследования по созданию генераторов, аналогичных исследованным в [6–А, 8–А, 9–А], продолжают во всем мире [138–140].

Теоретический расчет процессов генерации излучения в структурах, подобных изображенным на рис. 5.1, представляет достаточно большую проблему. Из-за сложной конфигурации границ и отсутствия аксиальной симметрии получить точное аналитическое решение уравнений Максвелла здесь не представляется возможным. В работах [6–А, 8–А, 9–А] основной расчет генераторов проводился с помощью численного моделирования в специализированных программных пакетах. Однако для дальнейшего развития исследований в данном направлении чрезвычайно важна разработка хотя бы приближенных теоретических моделей, позволяющих оценивать необходимые параметры генераторов, которые затем уже можно использовать как исходные для дальнейшей оптимизации. Настоящая глава представляемой диссертации представляет собой ещё один шаг в данном направлении.

5.2 Взаимодействие электронного пучка с волной в периодическом волноводе

Систему уравнений, описывающих процесс взаимодействия электронного пучка с электромагнитной волной в волноводе, можно получить из уравнений Максвелла и уравнений движения электронов в электромагнитном поле. Для этого перепишем уравнения Максвелла в следующей форме

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega), \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, \omega), \quad (5.2)$$

$$i\omega \rho(\mathbf{r}, \omega) - \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt$ – фурье-образ электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$; $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей волновод; $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ и $\rho(\mathbf{r}, \omega)$ – фурье-образы плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ и плотности заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ электронного пучка соответственно. Величины $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ и $\rho(\mathbf{r}, t)$ простым образом выражаются через координаты и скорости электронов пучка

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)), \quad (5.4)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)), \quad (5.5)$$

где $\mathbf{r}_\alpha(t)$, $\mathbf{v}_\alpha(t)$ – радиус-вектор и скорость α -го электрона соответственно; суммирование ведётся по всем электронам пучка.

Уравнения движения электронов могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{d\mathbf{v}_\alpha(t)}{dt} = \frac{e}{m\gamma} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha(t), t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha(t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)] - \frac{\mathbf{v}_\alpha}{c^2} (\mathbf{v}_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)) \right\}, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)$ – электрическое и магнитное поля в точке $\mathbf{r}_\alpha(t)$ в момент времени t , $\gamma = (1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ – лоренц-фактор.

Пусть электронный пучок распространяется внутри волновода круглого сечения. Будем считать, что начальная скорость частиц пучка имеет только z -составляющую ($\mathbf{u} = u\mathbf{e}_z$; ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) – единичные орты системы координат, z – ось волновода), и пучок “холодный”, т.е. разбросом скоростей электронов в пучке можно пренебречь. Пусть внутри волновода располагается фотонный кристалл, образованный металлическими нитями. Для того, чтобы упростить задачу, будем считать, что нити в соседних (вдоль z) слоях ориентированы перпендикулярно друг другу; в этом случае свойства кристалла в направлениях x и y будут одинаковы.

Рассматриваемая система, таким образом, представляет собой волновод с периодическим заполнением. Диэлектрическую проницаемость среды (кристалла) внутри волновода запишем в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0(\boldsymbol{\rho}) + \chi(\mathbf{r}, \omega), \quad (5.7)$$

где χ – периодическая по z функция, которая может быть разложена в ряд Фурье

$$\chi(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\tau \neq 0} \chi_\tau(\boldsymbol{\rho}, \omega) e^{i\tau z},$$

а $\boldsymbol{\rho}$ – поперечная компонента радиус-вектора. Везде в дальнейших рассуждениях будем полагать $|\chi(\mathbf{r}, \omega)| \ll 1$. Введем также обозначение $\chi_0 = \varepsilon_0 - 1$.

С помощью уравнений (5.2, 5.3) можем получить, что

$$\text{grad div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega \varepsilon_0} \nabla(\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)) - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla(\nabla \chi(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)). \quad (5.8)$$

Пренебрегая вторым членом в правой части предыдущего уравнения в связи с малостью χ_τ , выражение (5.1) можно переписать следующим образом

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \approx \frac{4\pi i}{c^2} \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{c^2}{\omega^2 \varepsilon_0} \nabla(\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)) \right). \quad (5.9)$$

Будем искать электрическое поле в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) e^{ik_z z} dk_z.$$

Подставляя это разложение в уравнение (5.9) и принимая $\chi_\tau = 0$, $\mathbf{j} = 0$, получим уравнение для нахождения собственных функций (мод) волновода $\mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}, k_z)$ и соответствующих им собственных чисел κ_n :

$$\nabla_\perp^2 \mathbf{Y}_n + \kappa_n^2 \mathbf{Y}_n = 0, \quad (5.10)$$

где κ_n – собственные числа, а $\nabla_\perp = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$. Собственные функции цилиндрических волноводов простых сечений (круглый, прямоугольный) хорошо изучены [20, 67, 141], поэтому далее будем полагать их известными, и для простоты пока будем нумеровать единственным индексом n . Кроме того, будем считать, что собственные функции нормированы в соответствии с условием

$$\int \mathbf{Y}_m^* \mathbf{Y}_n d^2 \boldsymbol{\rho} = \delta_{mn}. \quad (5.11)$$

Разложим теперь поле $\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)$ в волноводе по собственным функциям

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = \sum_n a_n(k_z) \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}, k_z), \quad (5.12)$$

где $a_n(k_z)$ – коэффициенты разложения (амплитуды соответствующих мод). Таким образом, окончательно поле в волноводе будем искать в следующем виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int a_n(k_z) \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}, k_z) e^{ik_z z} dk_z. \quad (5.13)$$

Подставим выражение для поля (5.13) в уравнение (5.9). Левая часть его примет следующий вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_n \int dk_z \left\{ \left(k_z^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa_n^2 \right) \right) \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}, k_z) a_n(k_z) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\tau \neq 0} \chi_\tau \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}, k_z - \tau) a_n(k_z - \tau) \right\} e^{ik_z z} \quad (5.14)$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо ещё выразить плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ через поле и подставить в правую часть уравнения (5.9). Для исследования проблемы неустойчивости ограничимся линейным по полю приближением. В этом случае плотность тока \mathbf{j} линейно зависит от поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \delta\mathbf{j}$, где \mathbf{j}_0 – невозмущенный ток электронов, $\delta\mathbf{j} \sim \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ – поправка, обусловленная возмущением пучка электронов полем. С помощью уравнения (5.4) находим, что поправка $\delta\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ выражается через

возмущение скорости $\delta \mathbf{v}_\alpha$ следующим образом

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &\equiv \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} \delta \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} dt = \\ &= e \sum_{\alpha} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha 0}} \left\{ \delta \mathbf{v}_\alpha(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) + \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}} \mathbf{u} (\mathbf{k} \delta \mathbf{v}_\alpha(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})) \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Величину $\delta \mathbf{v}_\alpha(\omega)$ можно найти с помощью уравнений движения

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_\alpha(\omega) &= \frac{ie}{m\omega\gamma} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}_{\alpha 0}} \left\{ \frac{\omega}{\omega + \mathbf{k}'\mathbf{u}} \mathbf{E}(\mathbf{k}', \omega + \mathbf{k}'\mathbf{u}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\mathbf{k}'}{\omega + \mathbf{k}'\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \right) \cdot (\mathbf{u} \mathbf{E}(\mathbf{k}', \omega + \mathbf{k}'\mathbf{u})) \right\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

При подстановке (5.16) в (5.15) в результирующей формуле для плотности тока появится сумма вида $\sum_{\alpha} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{r}_{\alpha 0}}$. Усредним её по распределению частиц в пучке

$$\sum_{\alpha} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{r}_{\alpha 0}} \simeq \Phi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) \cdot (2\pi)^3 n_0 \delta(k_z - k'_z), \quad (5.17)$$

где $\Phi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_S e^{-i(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp})\boldsymbol{\rho}} n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho}$, $\frac{1}{S} \int_S n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho} = 1$, S – площадь поперечного сечения волновода, n_0 – плотность пучка. Функция $n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho})$ описывает распределение электронов по поперечному сечению пучка; в частности, если невозмущенный пучок равномерно заполняет все сечение волновода, то $n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho}) \equiv 1$ и $\sum_{\alpha} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}_{\alpha 0}} = (2\pi)^3 n_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

Таким образом, подставляя (5.16) в выражение для плотности тока, используя (5.17), и пренебрегая нерезонансными членами (решение ищем вблизи черенковского синхронизма $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} = 0$), находим

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{ie^2 n_0 \mathbf{u}}{\omega c^2 m \gamma} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k} d^2\boldsymbol{\rho}'}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho}') e^{i\mathbf{k}_{\perp}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')} e^{ik_z z} \times \\ &\quad \times \left(-ic^2 \mathbf{k}_{\perp} \nabla'_{\perp} + \frac{c^2 - u^2}{u^2} \omega^2 \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}', k_z)) a_n(k_z). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Используя (5.18), правую часть уравнения (5.9) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_n \int dk_z e^{ik_z z} \left(-\frac{4\pi e^2 n_0}{m\gamma c^4} \right) \frac{1}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \left\{ \int d^2\boldsymbol{\rho}' \frac{d^2\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho}') e^{i\mathbf{k}_{\perp}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')} \times \right. \\ \left. \times \left(\mathbf{u} - \frac{c^2}{\omega^2 \varepsilon_0} \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{u}) \right) \left(-ic^2 \mathbf{k}_{\perp} \nabla'_{\perp} + \frac{c^2 - u^2}{u^2} \omega^2 \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}', k_z)) a_n(k_z) \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Поскольку уравнение (5.9) справедливо при любых значениях координаты z , подынтегральные выражения в (5.14) и (5.19) должны быть равны (т.е. интегрирование по k_z можно отбросить). Умножим далее левую (5.14) и правую (5.19) части уравнения (5.9) на $\mathbf{Y}_m^*(\boldsymbol{\rho}, k_z)$ и проинтегрируем по $\boldsymbol{\rho}$. В результате приходим к следующей системе уравнений для амплитуд $a_m(k_z)$:

$$\begin{aligned} \left(k_z^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa_m^2 \right) \right) a_m(k_z) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_n \sum_{\tau \neq 0} \chi_{eff}^{mn}(k_z, k_z - \tau) a_n(k_z - \tau) = \\ = - \frac{\omega_l^2}{\gamma} \frac{1}{(\omega - k_z u)^2} \sum_n A_{mn} a_n(k_z), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\omega_l = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$ – ленгмюровская частота пучка, а эффективная восприимчивость χ_{eff}^{mn} равна

$$\chi_{eff}^{mn}(k_z, k_z - \tau) = \int \mathbf{Y}_m^*(\boldsymbol{\rho}, k_z) \chi_\tau \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}, k_z - \tau) d^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (5.21)$$

Коэффициентами A_{mn} в (5.20) обозначены величины

$$\begin{aligned} A_{mn} = \frac{1}{c^4} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} d^2 \boldsymbol{\rho} d^2 \boldsymbol{\rho}' n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho}') e^{i\mathbf{k}_\perp(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \times \\ \times \mathbf{Y}_m^*(\boldsymbol{\rho}, k_z) \left(\mathbf{u} - \frac{c^2}{\omega \varepsilon_0} \mathbf{k} \right) \left(-i c^2 \mathbf{k}_\perp \nabla'_\perp + \frac{c^2 - u^2}{u^2} \omega^2 \right) (\mathbf{u} \mathbf{Y}_n(\boldsymbol{\rho}', k_z)). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Отметим, что в случае $n_{0\perp}(\boldsymbol{\rho}) = 1$ выражение для A_{mn} существенно упрощается:

$$A_{mn} = ((k_z^2 + \kappa_{mn}^2) c^2 - \omega^2) \frac{1}{c^4} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} (\mathbf{u} \mathbf{Y}_m^*(\mathbf{k}_\perp, k_z)) (\mathbf{u} \mathbf{Y}_n(\mathbf{k}_\perp, k_z)), \quad (5.23)$$

где $\mathbf{Y}_n(\mathbf{k}_\perp, k_z) = \int e^{-i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp} \mathbf{Y}_n(\mathbf{r}_\perp, k_z) d^2 \mathbf{r}_\perp$.

5.3 Свободные электромагнитные колебания

Рассмотрим сначала с помощью полученных уравнений процесс распространению волн в волноводе, заполненном кристаллом из металлических нитей, при отсутствии электронного пучка. Напомним, что согласно [67] существуют 3 системы собственных функций волновода – 2 поперечных и 1 продольная (часто для их обозначения используют термин “тип волны”, т.е. существует 3 типа собственных волн). Для случая круглого волновода их можно записать в следующем виде

$$\mathbf{M}_{mn} = \frac{i}{k} [\mathbf{e}_z \times \text{grad } \psi_{mn}] e^{ik_z z - i\omega t} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{N}_{mn} = \left[\frac{(\kappa_{mn}^{(e)})^2}{k^2} \chi_{mn} \mathbf{e}_z + \frac{ik_z}{k^2} \text{grad } \chi_{mn} \right] e^{ik_z z - i\omega t} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{L}_{mn} = \left[\frac{k_z}{k} \chi_{mn} \mathbf{e}_z - \frac{i}{k} \text{grad } \chi_{mn} \right] e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (5.26)$$

где $k_z \equiv \sqrt{k^2 - \kappa_{mn}^2}$, $\psi_{mn} = J_m(\rho \kappa_{mn}^{(h)}) \cos m\varphi$, $\chi_{mn} = J_m(\rho \kappa_{mn}^{(e)}) \cos m\varphi$, $\kappa_{mn}^{(h)} = \mu_{mn}/R$, $\kappa_{mn}^{(e)} = \nu_{mn}/R$, μ_{mn} – n -й корень уравнения $J'_m(x) = 0$, ν_{mn} – n -й корень уравнения $J_m(x) = 0$, J_m – функция Бесселя m -го порядка, J'_m – её производная, R – радиус волновода, φ – азимутальный угол. Поперечные функции \mathbf{M}_{mn} и \mathbf{N}_{mn} описывают свободную электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси волновода и отвечают волнам H_{mn} -типа и E_{mn} -типа соответственно [142]. Для продольной системы \mathbf{L}_{mn} имеем $\text{div } \mathbf{L}_{mn} \neq 0$, следовательно соответствующая ей волна не может существовать в пустом волноводе. Однако, если в волноводе распространяется электронный пучок, то плотность электрического заряда ρ , а следовательно и дивергенция электрического поля внутри волновода, вообще говоря, отличны от нуля, и для нахождения поля в волноводе необходимо использовать все три системы собственных функций. Будем интересоваться прежде всего развитием неустойчивости в системе при малых токах пучка (в линейном режиме), не останавливаясь на исследовании волн пространственного заряда, для описания которых также пришлось бы привлекать функции \mathbf{L}_{mn} . Поэтому везде далее считаем, что амплитуда волн типа \mathbf{L}_{mn} достаточно мала.

Рассмотрим, для примера генерацию на моде E_{01} круглого волновода [142]. Векторную собственную функцию $\mathbf{Y}_1(\boldsymbol{\rho}, k_z)$, соответствующую волне E_{01} , примем согласно (5.25) в виде

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi} R J_1(\nu_{01})} \left\{ \frac{-ik_z}{\sqrt{k_z^2 + \kappa^2}} J_1(\rho \kappa) \mathbf{e}_r + \frac{\kappa}{\sqrt{k_z^2 + \kappa^2}} J_0(\rho \kappa) \mathbf{e}_z \right\}, \quad (5.27)$$

где $\nu_{01} \approx 2.4048$, $\kappa = \nu_{01}/R$. Эффективная восприимчивость согласно (5.21) будет равна

$$\chi_{eff}(k_z, \tau) = \chi_\tau \int \mathbf{Y}_1^*(\boldsymbol{\rho}, k_z) \mathbf{Y}_1(\boldsymbol{\rho}, k_z - \tau) d^2 \boldsymbol{\rho} = \chi_\tau \left(1 - \frac{k_z \tau}{k_z^2 + \kappa^2} \right). \quad (5.28)$$

В случае свободных электромагнитных колебаний ($\mathbf{j} = 0$) имеем следующую систему уравнений

$$\left(k_z^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa^2 \right) \right) a(k_z) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\tau \neq 0} \chi_{eff}(k_z, \tau) a(k_z - \tau) = 0. \quad (5.29)$$

По своему виду уравнения (5.29) совпадают с уравнениями, описывающими волновое поле в кристалле в условиях многоволновой динамической дифракции [106, 143]. Если в рассматриваемой структуре (представляющей по сути одномерный фотонный кристалл) существует только одна сильная волна (амплитудами дифрагированных волн $a(k_z + \tau)$, $\tau \neq 0$ можно пренебречь), то из (5.29) получаем единственное уравнение

$$\left(k_z^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa^2 \right) \right) a(k_z) = 0,$$

откуда сразу находим $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa^2$, т.е. обычное дисперсионное уравнение для волновода, заполненного диэлектриком с проницаемостью ε_0 [20, 141]. Предположим, что выполнены условия двухволновой дифракции; это значит, что амплитуда дифрагированной волны сравнима с амплитудой прямой (в волноводе существуют одновременно две сильные волны). Пусть это будут волны $a(k_z)$ и $a(k_z + \tau)$. Тогда из (5.29) выделяется следующая система двух уравнений (далее для краткости обозначено $k_{z\tau} \equiv k_z + \tau$, $a_0 \equiv a(k_z)$, $a_\tau \equiv a(k_z + \tau)$)

$$\begin{cases} \left(k_z^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa^2 \right) \right) a_0 - \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{-\tau} \left(1 + \frac{k_z \tau}{k_z^2 + \kappa^2} \right) a_\tau = 0 \\ -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_\tau \left(1 - \frac{k_{z\tau} \tau}{k_{z\tau}^2 + \kappa^2} \right) a_0 + \left(k_{z\tau}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa^2 \right) \right) a_\tau = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Дисперсионное уравнение получается приравнованием определителя системы (5.30) к нулю:

$$(k_z^2 - k_{z0}^2)(k_{z\tau}^2 - k_{z0}^2) - \frac{\omega^4}{c^4} \chi_\tau^2 \left(1 + \frac{k_z \tau}{k_z^2 + \kappa^2} \right) \left(1 - \frac{k_{z\tau} \tau}{k_{z\tau}^2 + \kappa^2} \right) = 0, \quad (5.31)$$

где $k_{z0}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa^2$, и положено $\chi_\tau = \chi_{-\tau}$. Это уравнение четвертой степени и оно имеет в общем случае четыре различных корня. Однако при выполнении условий двухволновой дифракции два корня имеют близкие значения (и могут вообще совпадать в т.н. точке вырождения корней). Приблизительно значения этих корней можно записать следующим образом

$$k_z^{(1,2)} = k_{z0} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \alpha_B \beta \pm \frac{1}{4} \sqrt{(\alpha_B \beta)^2 + 4 \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\chi(k_{z0\tau}, \tau) \chi(k_{z0}, -\tau)}{k_{z0}^4} \beta} \right\}, \quad (5.32)$$

$\beta = \frac{k_{z0}}{k_{z0+\tau}}$ – фактор асимметрии дифракции, $\alpha_B = \frac{(2k_{z0+\tau})\tau}{k_{z0}^2}$ характеризует отклонение от точного выполнения условия Брэгга ($\alpha_B = 0$ в случае его точного выполнения), $\tau = 2\pi/D$, D – период волновода.

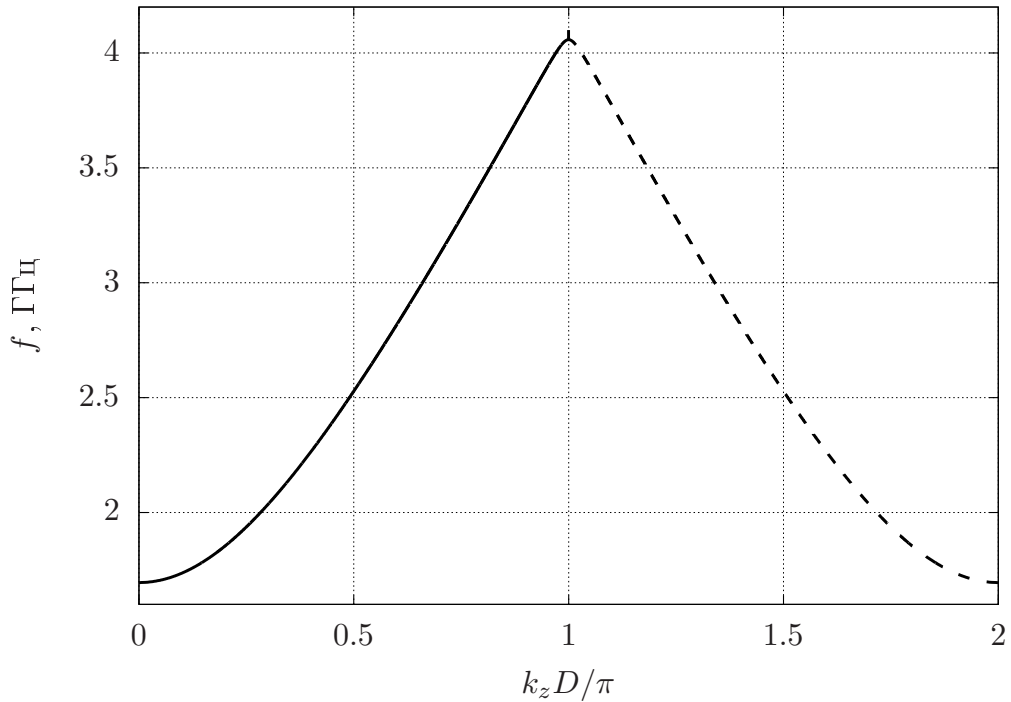


Рисунок 5.3. – Корни дисперсионного уравнения (волна E_{01}) для волновода с периодическим заполнением. Сплошная и штриховая кривые – два корня, отвечающих прямой и обратной волнам соответственно

На рисунках 5.3-5.4 для примера приведены численные решения¹⁾ уравнения (5.31) в микроволновом диапазоне при следующих значениях параметров: радиус волновода $R = 6$ см, период кристалла $D = 3.6$ см, $\varepsilon_0 = 1.23$, $\chi_\tau = 0.05$. Дисперсионные характеристики согласно рисунку 5.3-5.4 имеют вид, типичный для замедляющих систем микроволновых генераторов [101, 142]. Вдали от точки пересечения корней (частота 4.06 ГГц, см. рисунок 5.4) дисперсионная характеристика для прямой волны (кривая $f(k_{z1})$) практически не отличается от параболы, описывающей дисперсию в волноводе с однородным заполнением (кривая $f(k_{z0})$), как и должно быть в случае малого χ_τ . На рисунке 5.4 также изображена прямая $\omega = k_z u$ (энергия пучка 600 кэВ), точка пересечения которой с дисперсионной кривой определяет частоту генерации. Действительно, из графика нетрудно видеть, что именно в этой точке может быть выполнено условие черенковского синхронизма: фазовая скорость волны E_{01} $v = \omega/k_z$ будет равна скорости частиц пучка. Очевидно также, что изменяя (в данном случае увеличивая) энергию пучка, можно добиться ситуации, когда точка черенковского синхронизма совпадет

¹⁾Вдали от точки вырождения два корня (5.32) соответствуют т.н. прямой и обратной волнам в волноводе. Несмотря на то, что в окрестности точки вырождения корней, строго говоря, такое деление некорректно, мы и в этом случае будем использовать для обозначения корней устоявшиеся названия – “прямая” и “обратная” волна.

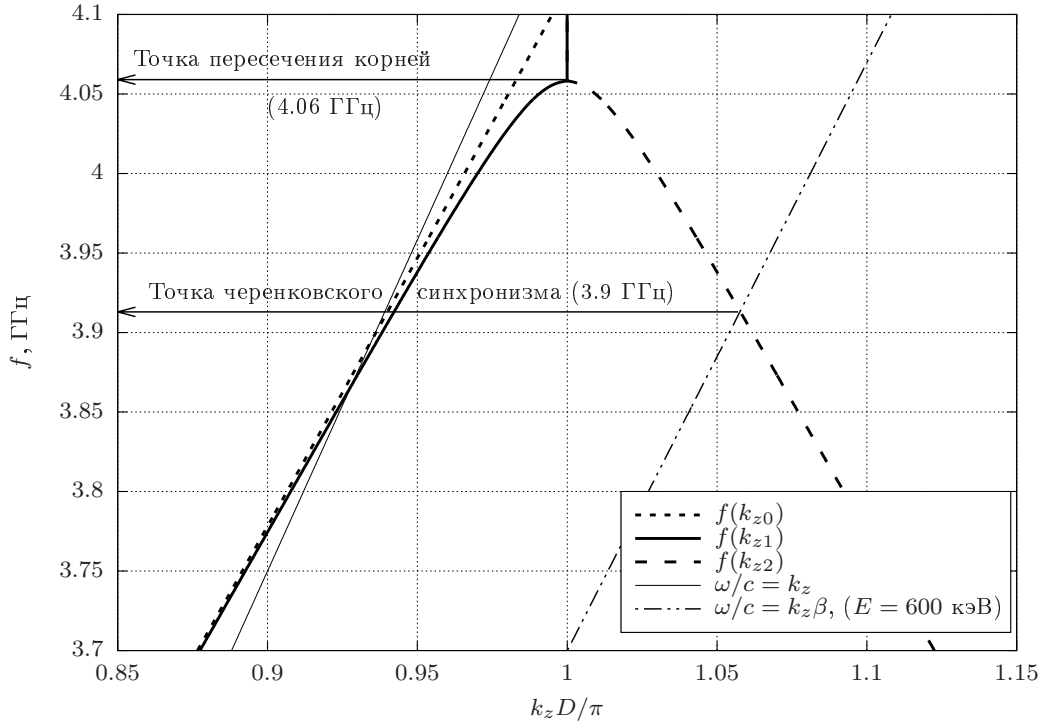


Рисунок 5.4. – Корни дисперсионного уравнения (увеличена область вблизи точки пересечения корней)

с точкой пересечения корней. Ниже мы приведем примеры расчета инкремента неустойчивости электронного пучка в этой области для микроволнового и ТГц диапазонов.

5.4 Инкремент неустойчивости электронного пучка

Пусть теперь в рассматриваемом волноводе распространяется электронный пучок. Уравнения (5.20) при генерации на волне E_{01} в принятых обозначениях будут иметь следующий вид

$$(\omega - k_z u)^2 \left((k_z^2 - k_{z0}^2) a(k_z) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\tau \neq 0} \chi_{eff}(k_z, \tau) a(k_z - \tau) \right) = \frac{\omega_l^2}{\gamma} A_{11} a(k_z). \quad (5.33)$$

Предположим, что в невозмущенный пучок занимает все сечение волновода и $n_{0\perp}(\rho) = 1$. Вычисление коэффициента A_{11} согласно (5.22) даёт

$$A_{11} = ((k_z^2 + \kappa^2) c^2 - \omega^2) \frac{u^2}{c^4} \frac{\kappa^2}{k_z^2 + \kappa^2}. \quad (5.34)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\chi_\tau = 0$. Очевидно, что при этом дифрагированная волна отсутствует, реализуется одноволновой режим, и система (5.33) сводится к единственному уравнению. Будем полагать, что правая

часть (5.33) мала, и в качестве начального приближения используем спектр волн этого уравнения с нулевой правой частью. Решение, таким образом, будем искать в виде малой поправки к решениям уравнения в случае отсутствия пучка: $k_z = k_{z1} + \delta k_z$, где δk_z – поправка, $k_{z1} = \sqrt{\frac{\omega_l^2}{c^2} \varepsilon_0 - \kappa^2}$. Повторяя рассуждения, приведенные, например, в работе [108], приходим к уравнению

$$(\delta k_z)^3 = -\frac{\omega_l^2}{2k_{z1}u^2\gamma} A_{11},$$

откуда инкремент неустойчивости пучка (мнимая часть k_z) равен

$$\text{Im } k_z = \text{Im } \delta k_z = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_l^2}{2k_{z1}u^2\gamma} A_{11} \right)^{\frac{1}{3}} \sim \rho^{1/3}, \quad (5.35)$$

т.к. ленгмюровская частота $\omega_l \sim \rho^{1/2}$. Таким образом, мы получили хорошо известную зависимость инкремента излучательной неустойчивости от плотности пучка $\text{Im } k_z \sim \rho^{1/3}$, характерную для всех механизмов генерации индуцированного излучения релятивистскими пучками в комптоновском режиме [101, 144].

Рассмотрим теперь случай $\chi_\tau \neq 0$, $|\chi_\tau| \ll 1$. Остановимся подробнее на ситуации, когда выполнены условия двухволновой дифракции и в фотонном кристалле одновременно существуют две сильных волны. Вместо системы (5.33) будем иметь систему из двух уравнений для прямой и дифрагированной волны, подобную (5.30), только с отличной от нуля правой частью. Дисперсионное уравнение получим, приравнивая определитель этой системы к нулю. Имеем (ср. с (5.31)):

$$\begin{aligned} (\omega - k_z u)^2 \{ (k_z^2 - k_{z0}^2)(k_{z\tau}^2 - k_{z0}^2) - k_0^4 \chi_{eff}(k_{z\tau}, \tau) \chi_{eff}(k_z, -\tau) \} = \\ = -\frac{\omega_l^2}{\gamma} A_{11} (k_{z\tau}^2 - k_{z0}^2). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Решения этого уравнения также будем искать в виде малой поправки к решениям дисперсионного уравнения при отсутствии пучка $k_z = k_{z1} + \delta k_z$. Обозначим выражение в фигурных скобках в (5.36) как $D(k_z, k_0)$; тогда корни уравнения $D(k_z, k_0) = 0$ являются решениями k_{z1} дисперсионного уравнения при отсутствии электронного пучка. Разлагая функцию $D(k_z, k_0)$ в ряд Тейлора по аргументу k_z вблизи точки $k_z = k_{z1}$, получим из (5.36) следующее уравнение для определения δk_z

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial k_z^2} \right)_{k_{z1}, k_0} \delta k_z^4 + \left(\frac{\partial D}{\partial k_z} \right)_{k_{z1}, k_0} \delta k_z^3 + \frac{\omega_l^2}{\gamma u^2} A_{11} (k_{z\tau}^2 - k_{z0}^2) = 0. \quad (5.37)$$

Можно показать, что в точке пересечения корней дисперсионного уравнения производная $\frac{\partial D}{\partial k_z} \rightarrow 0$. В этом случае инкремент неустойчивости $\text{Im } k_z$ будет равен

$$\begin{aligned} \text{Im } k_z = \text{Im } \delta k_z &= \left(-\frac{\omega_l^2}{\gamma u^2} A_{11} (k_{z\tau}^2 - k_{z0}^2) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial k_z^2} \right)_{k_{z1}, k_0}^{-1} \right)^{1/4} \approx \\ &\approx \left(\frac{\omega_l^2 k_0^2 \sqrt{\chi(k_{z0\tau}, \tau) \chi(k_{z0}, -\tau)}}{\gamma u^2 \tau^2} A_{11} \right)^{1/4} \sim \rho^{1/4}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Таким образом, при выполнении условий двухволновой дифракции характер развития неустойчивости пучка меняется: инкремент неустойчивости становится пропорционален корню четвертой степени из плотности пучка вместо третьей в одноволновом режиме. Такое поведение отражает общую закономерность, установленную в [83, 103], согласно которой в условиях многоволновой дифракции инкремент неустойчивости оказывается пропорциональным $\rho^{1/(s+3)}$, где s – число волн, возникающих в результате дифракции. Используя (5.35) и (5.38), получим для отношения инкрементов неустойчивости в двух- и одноволновом случаях

$$\frac{\text{Im } k_z^{(2)}}{\text{Im } k_z^{(1)}} \approx \left(\frac{\omega_l^2 \tau^2 A_{11}}{\omega_0^2 k_0^2 k_0^2} \frac{1}{(\sqrt{\chi(k_{z0\tau}, \tau) \chi(k_{z0}, -\tau)})^3 \beta^2 \gamma} \right)^{-1/12} \gg 1, \quad (5.39)$$

поскольку $\omega_l^2 \ll \omega_0^2$, $A_{11} \ll k_0^2$. Таким образом, в условиях дифракции инкремент неустойчивости, а вместе с ним и усиление, оказываются больше, чем в одноволновом случае.

5.5 Численные решения

Для экспериментальных исследований важно знать, в каком интервале частот вблизи точки пересечения корней существенны проявления указанного эффекта (рост инкремента неустойчивости). Необходимые для этого зависимости инкремента неустойчивости от частоты можно получить путем численного решения уравнения (5.33). Приведем здесь в качестве примера результаты проведенных расчетов для двух частотных диапазонов: микроволнового и ТГц.

На рисунке 5.5 показана зависимость инкремента неустойчивости от частоты вблизи точки вырождения корней для уже упоминавшейся системы ($R = 6$ см, $D = 3.6$ см, $\varepsilon_0 = 1.23$, $\chi_\tau = 0.05$). Поясним, как строились кривые на рисунке 5.5. Вначале были найдены решения “холодного” (при

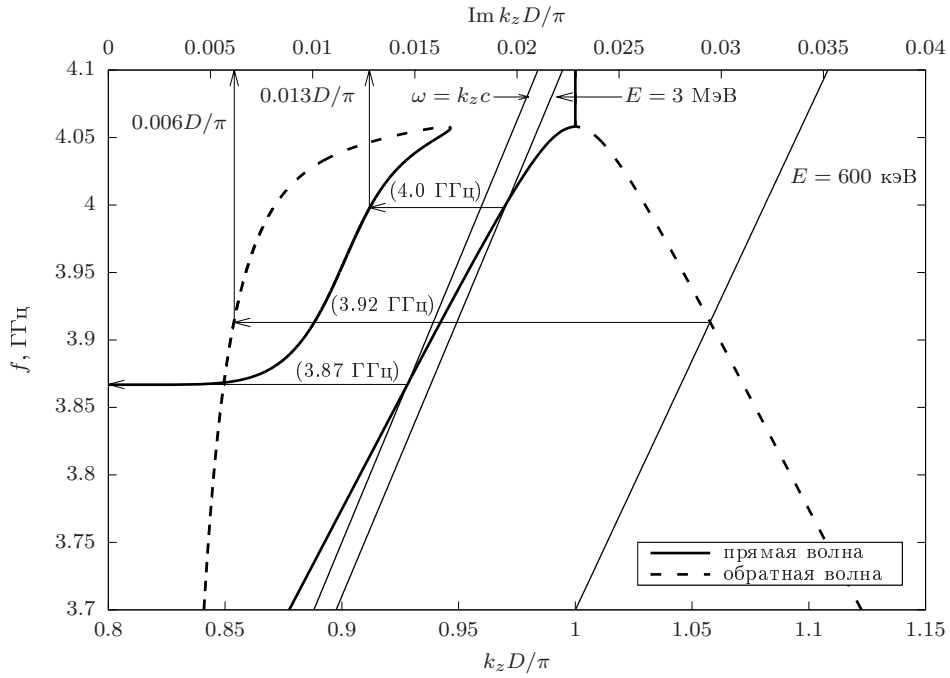


Рисунок 5.5. – Зависимость инкремента неустойчивости от частоты вблизи точки пересечения корней дисперсионного уравнения. Параметры кристалла $R = 6$ см, $D = 3.6$ см, $\varepsilon_0 = 1.23$, $\chi_\tau = 0.05$, $I = 0.1$ кА

отсутствии электронного пучка) дисперсионного уравнения (5.31). Они показаны в правой части графика (сплошная и штриховая кривые соответствуют двум корням). Далее для каждой частоты f из выбранного диапазона находилось значение скорости β (энергии E) частиц пучка, при которой синхронизм реализуется на этой частоте. Исходя из найденного значения β , соответствующего лоренц-фактора γ и заданного значения тока пучка решались уравнения (5.36) и мнимая часть найденного решения откладывалась на графике; такая процедура проводилась для двух корней дисперсионного уравнения, соответствующих прямой (сплошная кривая) и обратной (штриховая кривая) волнам в волноводе. Например, для обратной волны синхронизм при энергии пучка 600 кэВ наступает на частоте 3.92 ГГц; если принять ток пучка равным 0.1 кА, то соответствующий инкремент неустойчивости составит $\text{Im } k_z \approx 0.006\pi/D \approx 0.007 \text{ см}^{-1}$, что и изображено на рисунке 5.5. Аналогичный пример приведен для прямой волны: при энергии пучка 3 МэВ синхронизм наступает на частоте 4.0 ГГц, инкремент неустойчивости равен $\text{Im } k_z \approx 0.013\pi/D \approx 0.011 \text{ см}^{-1}$.

Из рисунка 5.5 можно проследить типичную для исследуемых систем зависимость инкремента неустойчивости от частоты при приближении к точке вырождения корней. Легко видеть, что выполнение условий синхронизма для прямой волны возможно только для частот выше некоторой f_0 , т.к. скорость частиц пучка не может превышать скорость света в вакууме c . Поэтому для

прямой волны инкремент начинает расти от нулевого значения при частоте f_0 (в нашем случае $f_0 \approx 3.87$ ГГц) до максимума, который может наблюдаться как в точке пересечения корней, так и на некотором удалении от неё. Видно, что при приближении к этой точке скорость нарастания инкремента выше (быстрее увеличивается с частотой), чем вдали от условий дифракции. Для обратной волны наблюдается в целом аналогичная, но намного более выраженная картина: относительно медленный рост инкремента вдали от условий дифракции сменяется быстрым ростом при приближении к точке вырождения корней.

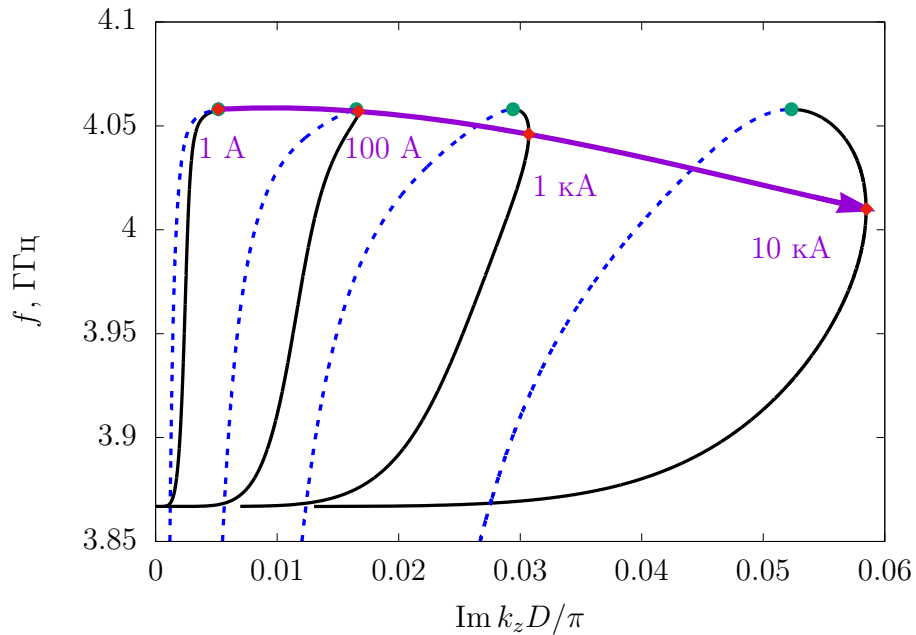


Рисунок 5.6. – Рост инкремента неустойчивости при увеличении тока пучка. Сплошными и штриховыми линиями показаны два корня дисперсионного уравнения (соответственно, прямая и обратная волна)

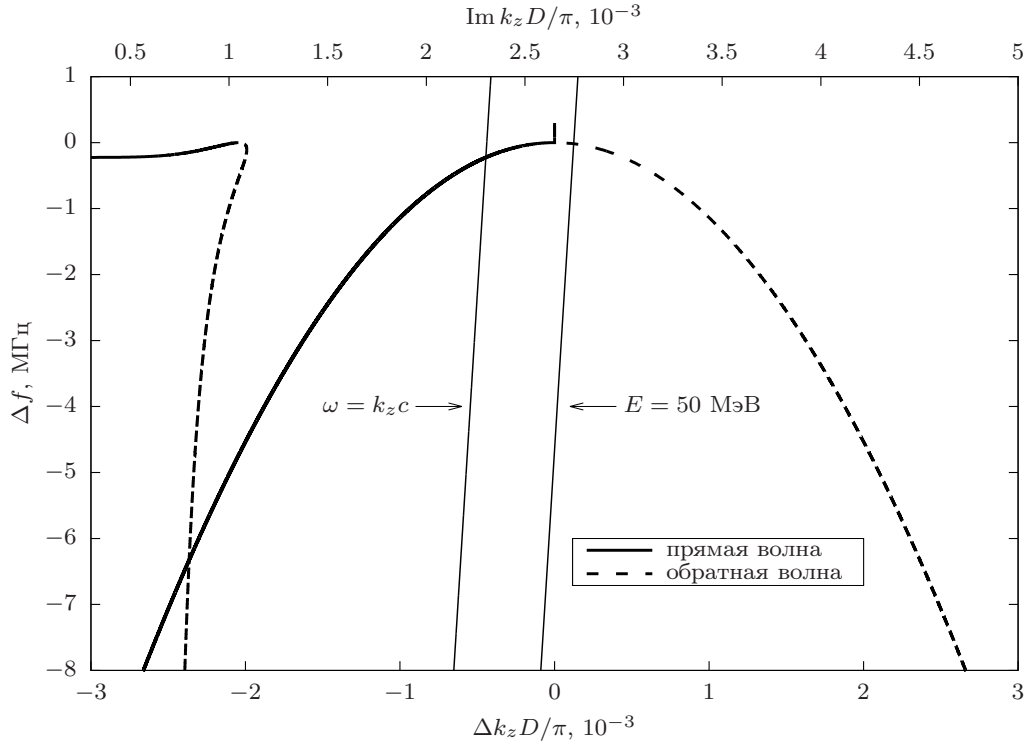
На рисунке 5.6 показано, как меняется инкремент неустойчивости в зависимости от величины тока электронного пучка. Для прямой волны при возрастании тока пучка положение максимума инкремента смещается вниз по частоте (показано на рисунке стрелкой). Характерно, что при увеличении тока максимум становится менее выраженным (пик шире и ниже). Тем не менее, при выбранных параметрах кристалла выигрыш в усилении для обратной волны вблизи точки вырождения может составить несколько раз. Характерная ширина частотного интервала, в котором происходит существенное увеличение инкремента, в данном примере составляет от нескольких десятков до нескольких сотен МГц. Например, при токе пучка 1 кА согласно рисунку 5.6 мнимая часть $\text{Im } k_z$ уменьшается в два раза при смещении от точки вырождения (4.06 ГГц) вниз по частоте на величину всего ~ 116 МГц; при смещении ещё на 100 МГц она уже почти такая же как в одноволновом

случае. На практике контролировать частоту генерации с такой точностью не всегда представляется возможным из-за множества факторов, например наличия в пучке некоторого разброса электронов по энергиям. Тем не менее возможно подобрать такие условия (геометрические размеры системы, величину ε_0 , χ_τ , энергию пучка и т.д.), при которых генерация вблизи точки вырождения корней может быть осуществлена с достаточной точностью. В частности, с помощью кривых на рисунке 5.5 и рисунке 5.6 можно найти, что в приведенном примере разброс электронов по энергии не играет существенной роли (для обнаружения эффекта достаточно иметь $\delta E \leq 30\%$ при энергии пучка $E \sim 1.6$ МэВ). Обратим внимание, однако, что при более низких энергиях пучка требования к его качеству существенно возрастают.

Приведем теперь результаты расчета для фотонного кристалла, образованного металлическими нитями, в ТГц-области частот при больших энергиях пучка (в частности, при энергиях, достижимых на ускорителе ЛИНАК-800 в Дубне, – десятках и сотнях МэВ). Пусть диаметр волновода составляет $R = 10$ мм, а период кристалла $D = 4$ мм (напомним, что нити в соседних слоях ориентированы перпендикулярно друг другу, так что расстояние между соседними слоями нитей 2 мм). Эффективные значения параметров χ_0 и χ_τ можно найти с помощью теории, развитой в предыдущих главах. Для примера примем, что $\chi_0 = 2 \cdot 10^{-4}$, $\chi_\tau = 3 \cdot 10^{-3}$; такие значения получаются при $kR_w \approx 0.67$, где R_w – радиус нитей. На рисунке 5.7 показаны типичные решения дисперсионного уравнения (5.33) для E_{01} -моды вблизи точки пересечения корней ($f \approx 0.412$ ТГц) в шестой полосе пропускания (вблизи $k_z = 11\pi/D$) для указанных параметров кристалла, а на рисунке 5.8 – зависимости инкремента неустойчивости от частоты для прямой и обратной волны при различных токах электронного пучка. В целом здесь наблюдается точно такая же картина, как и в микроволновом диапазоне: при достаточно низких токах максимальное значение инкремента имеет в точке пересечения корней дисперсионного уравнения, тогда как при увеличении тока максимум смещается вниз (т.е. достигается не строго в точке пересечения корней, а на некотором расстоянии от нее).

Поскольку связь частоты с энергией известна, приведенные на рисунке 5.8 результаты могут быть также представлены в виде графиков зависимости инкремента неустойчивости от энергии пучка. На рисунке 5.9 показаны такие зависимости для различных токов пучка. Можно видеть, что при малых токах инкремент имеет максимальное значение при $\gamma \sim 100$ (энергия 50 МэВ), а при увеличении тока пучка оптимальное значение энергии уменьшается.

В завершение приведем также зависимость порогового тока генерации от длины кристалла L . В соответствии с результатами [82], вблизи точки пере-



По оси ординат отложена разность $\Delta f = f - f_0$, где $f_0 \approx 412$ ГГц – значение частоты в точке пересечения корней дисперсионного уравнения, по оси абсцисс – величина $\Delta k_z D / \pi = k_z D / \pi - 11$; кроме того, в левой части графика изображены также значения инкремента неустойчивости при токе пучка 10 А. Диаметр составляющих кристалл нитей 155 мкм.

Рисунок 5.7. – Корни дисперсионного уравнения (увеличена область вблизи точки пересечения корней)

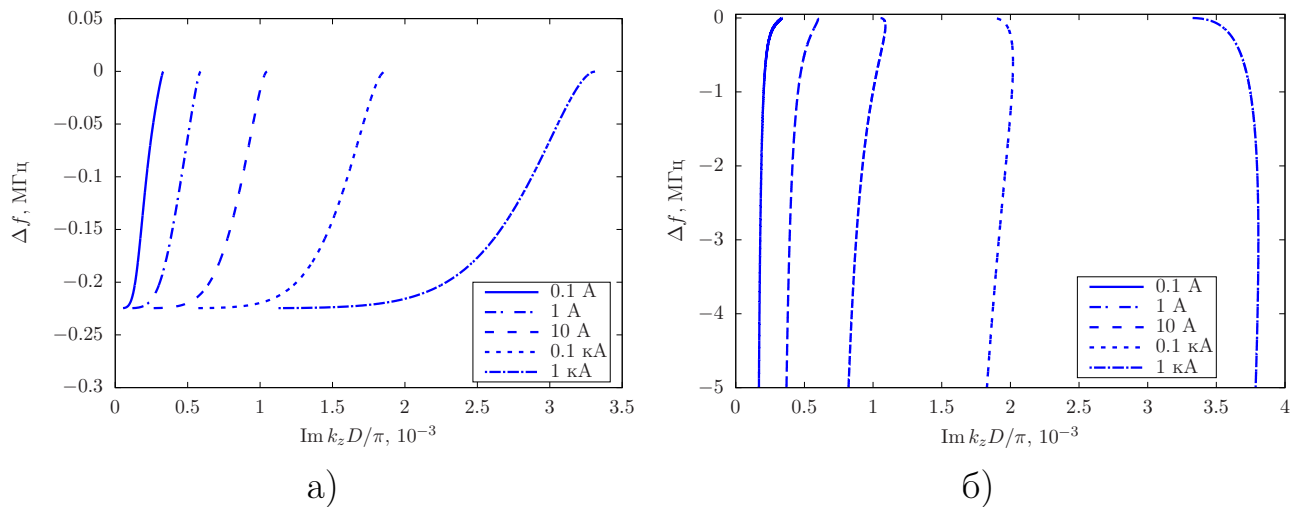


Рисунок 5.8. – Рост инкремента неустойчивости при увеличении тока пучка: а) – прямая волна, б) – обратная волна

сечения корней плотность тока пучка, необходимая для начала генерации, обратно пропорциональна пятой степени L ($j_{st} \sim \frac{1}{L^5}$). Расчеты, проведенные по формуле (27) из работы [82], показывают, что в рассматриваемом примере для осуществления генерации могут использоваться кристаллы небольшой длины. Так, при токе пучка порядка 10 А для начала генерации достаточно иметь структуру длиной всего несколько сантиметров (рисунок 5.10).

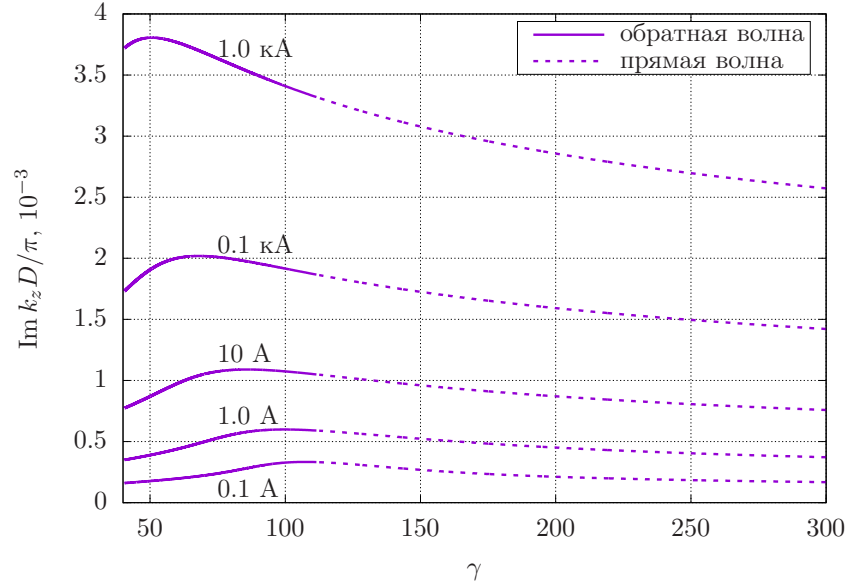


Рисунок 5.9. – Зависимость инкремента неустойчивости от энергии (лоренц-фактора) пучка

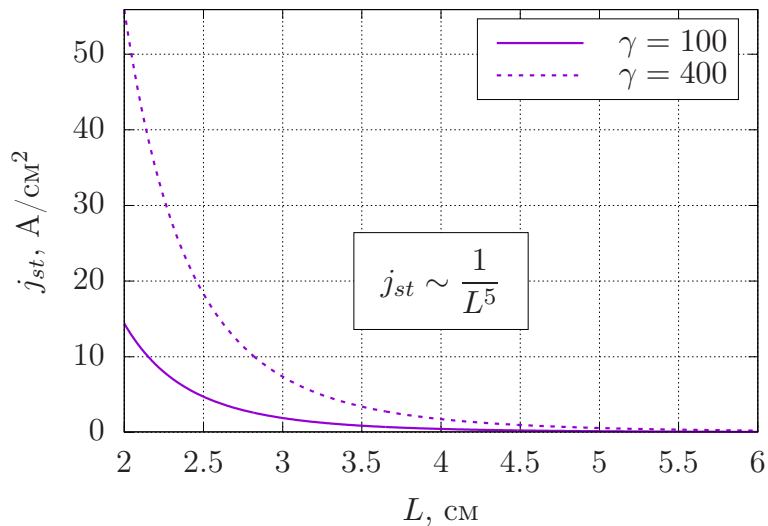


Рисунок 5.10. – Пороговые плотности тока, необходимые для начала генерации, при различных лоренц-факторах пучка

5.6 Выводы к главе 5

В данной главе на примере круглого волновода с периодическим диэлектрическим заполнением показано, что при движении электронного пучка в одномерных фотонных кристаллах при определённых условиях проявляется открытая в [83, 103] закономерность: инкремент неустойчивости электронного пучка оказывается пропорционален корню четвертой степени (а не третьей, как это обычно имеет место в комптоновском режиме генерации) из плотности пучка. Такое изменение зависимости происходит, когда черенковский синхронизм наступает вблизи точки вырождения корней дисперсионного уравнения, т.е. при выполнении условий двухволновой дифракции.

Показано, что инкремент неустойчивости и коэффициент усиления в этом случае имеют бóльшую величину, чем в одноволновом режиме, и при правильном выборе параметров кристалла (волновода) и электронного пучка этот эффект доступен для экспериментального обнаружения и может быть использован при создании генераторов и усилителей электромагнитного излучения в различных частотных диапазонах. Приведены результаты численных расчетов инкремента неустойчивости в микроволновом диапазоне при низких энергиях пучка (до единиц МэВ) и в ТГц-диапазоне при высоких энергиях (десятки и сотни МэВ), доступных на современных ускорителях. Показано, что при увеличении тока пучка положение максимума инкремента неустойчивости смещается от точки вырождения корней дисперсионного уравнения вниз по частоте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Диссертационная работа посвящена исследованию процессов излучения электромагнитных волн релятивистскими заряженными частицами в фотонных кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами. Рассмотрены преломление и дифракция волн в таких кристаллах. Исследовано спонтанное излучение фотонов релятивистскими заряженными частицами в кристаллах, образованных параллельными металлическими нитями, а также радиационная неустойчивость релятивистского электронного пучка и индуцированное излучение в одномерном цилиндрическом фотонном кристалле. Основные научные результаты диссертации заключаются в следующем:

- Развита теория преломления и дифракции волн в фотонных кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами, позволившая в явном виде получить выражения для показателя преломления и эффективных поляризуемостей кристалла. Показано, что, так же как и в случае изотропного рассеяния, показатель преломления кристалла определяется элементами матрицы реакций \mathbf{K} , а не элементами матрицы рассеяния \mathbf{T} , как это имеет место для хаотической среды. Элементы матрицы реакций также определяют и эффективные поляризуемости в уравнениях, описывающих динамическую дифракцию в кристаллах [3–А, 11–А, 20–А, 21–А].
- Установлено, что действительная часть показателя преломления кристалла, образованного параллельными металлическими нитями, для волны с перпендикулярной нитям поляризацией (TE-поляризация, вектор \mathbf{E} перпендикулярен осям нитей) больше единицы, а поглощение в кристалле существенно подавлено, несмотря на сильное поглощение фотонов в металле. Как следствие, в рассматриваемом кристалле возможно черенковское излучение в широком диапазоне частот, вплоть до оптических [1–А, 3–А, 7–А, 10–А, 21–А].
- Показано, что при типичных параметрах современных ускорителей, таких как ЛИНАК-800 в ОИЯИ (Дубна, Россия), JLab ERL в США, КЕК сERL в Японии, мощность спонтанного черенковского излучения в кристалле, образованном металлическими нитями, может достигать значительных величин (например, десятки ватт средней мощности для ускорителя Jlab ERL в США на частоте 0.5 ТГц), что позволяет использовать этот эффект для создания источников излучения в терагерцовом и оптическом диапазонах [1–А, 2–А, 3–А, 7–А, 10–А, 21–А].

- Получены уравнения, позволившие определить интенсивность переходного, черенковского и параметрического излучения в кристалле из металлических нитей в случае, когда длина волны сравнима с радиусом нитей ($kR \sim 1$). Численное решение полученных уравнений для выбранной геометрии кристалла позволило найти интенсивность излучения в области её максимального значения (при $kR \sim 1$) [5–А, 12–А, 13–А, 17–А, 18–А, 22–А].
- Показано, что в случае $kR \sim 1$ существенный вклад в суммарную интенсивность параметрического и черенковского излучения в кристалле из металлических нитей вносит ТЕ-поляризованная волна, тогда как в случае $kR \ll 1$ излучение практически полностью ТМ-поляризовано. Приведены результаты расчетов углового распределения излучения [5–А, 12–А, 13–А, 17–А, 18–А, 22–А].
- Показано, что при типичных параметрах существующих и строящихся ускорителей (ЛИНАК-800 в России, JLab ERL в США, КЕК сERL в Японии, ускоритель комплекса SwissFEL в Швейцарии) интенсивность излучения в области $kR \sim 1$ достигает значительных величин. Например, для ускорителей, генерирующих короткие (длительностью в десятки и сотни фемтосекунд) электронные сгустки с числом электронов $N_e \sim 10^9$ и высокой (десятки и сотни МГц) частотой повторения мгновенная мощность генерируемого ТГц-излучения может составлять единицы и десятки киловатт, а средняя мощность – десятки ватт. Увеличение числа частиц в сгустках до 10^{11} – 10^{13} , возможность которого является сегодня предметом интенсивных исследований при разработке новых ускорителей электронов и релятивистских ионов (протонов), позволит получать импульсы ТГц-излучения с рекордной мгновенной мощностью в сотни гигаватт [5–А, 12–А, 13–А, 17–А, 18–А, 22–А].
- Рассмотрено индуцированное излучение релятивистского электронного пучка в кристалле из металлических нитей, расположенном внутри круглого волновода. Рассчитаны зависимости инкремента радиационной неустойчивости пучка от частоты для нескольких примеров в микроволновой и ТГц-областях электромагнитного спектра. Показано, что при увеличении тока пучка положение максимума инкремента неустойчивости смещается из точки вырождения корней дисперсионного уравнения в область более низких частот. Установлены минимальные требования к электронному пучку, необходимые для осуществления генерации в области максимума инкремента неустойчивости в микроволновом диапазоне при низких энергиях пучка (до единиц МэВ) и в ТГц-диапазоне при высоких энергиях (десятки и сотни МэВ), доступных на

современных и строящихся ускорителях, таких как ЛИНАК-800 в ОИЯИ (Дубна, Россия) и т.д. В соответствии с результатами расчетов, пороговая (необходимая для начала генерации) плотность тока в рассматриваемых кристаллах имеет достаточно низкие значения и составляет десятки $\text{A}/\text{см}^2$ при толщине кристалла в несколько сантиметров [2–А, 4–А, 16–А, 19–А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут быть использованы при решении ряда задач, имеющих как научное, так и прикладное значение.

В частности, результаты второй и третьей глав могут представлять интерес при изучении дифракции нейтронов в фотонных кристаллах, а также при проектировании и разработке пространственно периодических метаматериалов с заданными свойствами.

Результаты, приведенные в четвертой и пятой главе, имеют значение для решения актуальной задачи создания мощных источников электромагнитного излучения в ТГц и оптическом диапазоне. В частности, на основе полученных результатов могут планироваться эксперименты по генерации импульсов терагерцового излучения электронными сгустками на ускорителях типа КЕК сERL в Японии или ЛИНАК-800 в ОИЯИ (Дубна, Россия). Кроме того, данные результаты могут использоваться при создании детекторов для регистрации заряженных частиц больших энергий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список использованных источников

1. Тер-Микаэлян, М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях / М.Л. Тер-Микаэлян. — Ереван : Издательство Академии наук Армянской ССР, 1969. — 459 с.
2. Baryshevsky, V.G. Parametric X-Ray Radiation in Crystals: Theory, Experiment and Applications / V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk, A.P. Ulyanenko. — Springer Tracts in Modern Physics, 2005. — Vol. 213. — 171 p.
3. Baryshevsky, V.G. High-energy nuclear optics of polarized particles / V.G. Baryshevsky. — Singapore : World Scientific, 2012. — 640 p.
4. Baier, V.N. Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals / V.N. Baier, V.M. Katkov, V.M. Strakhovenko. — Singapore : World Scientific, 1998. — 568 p.
5. Diffraction Radiation from Relativistic Particles / A.P. Potylitsyn [et al.]. — Berlin [etc.] : Springer, 2010. — 278 p.
6. Akhiezer, A.I. High Energy Electrodynamics in Matter / A.I. Akhiezer, N.F. Shul'Ga. — CRC Press, 1996. — 400 p.
7. Korol, A.V. Channeling and Radiation in Periodically Bent Crystals / A.V. Korol, A.V. Solov'yov, W. Greiner. — Berlin [etc.] : 2Springer, 2014. — 284 p.
8. Rullhusen, P. Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons: From Infrared to X-Rays / P. Rullhusen, X. Artru, P. Dhez. — Singapore : World Scientific, 1998. — 202 p.
9. Free Electron Lasers Based on Linac-800 / V.S. Alexandrov [et al.] // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations. — 2006. — №. 3. — P. 148–151.
10. High-power terahertz radiation from relativistic electrons / G.L. Carr [et al.] // Nature. — 2002. — Vol. 420, № 6912. — P. 153–156.
11. Recent Progress and Operational Status of the Compact ERL at KEK / S. Sakanaka [et al.] // Proceedings of IPAC2015, Richmond, VA, USA. — 2015. — P. 1359–1362.
12. 60 pC Bunch Charge Operation of the Compact ERL at KEK / T. Miyajima [et al.] // Proceedings of IPAC2017, Richmond, VA, USA. — 2017. — P. 890–893.

13. Neil, G.R. Accelerator Sources for THz Science: A Review / G.R. Neil // Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. — 2013. — Vol. 35, №. 1. — P. 5–16.
14. Compact, High-Power Electron Beam Based Terahertz Sources / S.G. Biedron [et al.] // Proceedings of the IEEE. — 2007. — Vol. 95, №. 8. — P. 1666–1678.
15. Opportunities in THz Science: Technical report of DOE-NSF-NIH Workshop (February 12-14, 2004) / M.A. Sherwin, P.H. Bucksbaum, C.A. Schmuttenmaer [et al.] // 2004. — 123 p.
16. Smith, S.J. Visible Light from Localized Surface Charges Moving across a Grating / S.J. Smith, E.M. Purcell // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 92. — P. 1069–1069.
17. Болотовский, Б.М. Дифракционное излучение / Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский // Успехи физических наук. — 1966. — Т. 88, № 2. — С. 209–251.
18. Тер-Микаэлян, М.Л. Излучение быстрых частиц в неоднородной среде / М.Л. Тер-Микаэлян // Доклады АН СССР. — 1960. — Т. 34. — С. 318.
19. Ter-Mikaelyan, M.L. Emission of fast particles in a heterogeneous medium / M.L. Ter-Mikaelyan // Nuclear Physics. — 1961. — Vol. 24. — P. 43.
20. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский — 2-е изд., испр. — Москва : Наука, 1982. — 621 с.
21. Франк, И.М. Излучение Вавилова-Черенкова: вопросы теории / И.М. Франк. — Москва : Наука, 1988. — 284 с.
22. Гинзбург, В.Л. Переходное излучение и переходное рассеяние: некоторые вопросы теории / В.Л. Гинзбург, В.Н. Цытович. — Москва : Наука, 1984. — 359 с.
23. Зрелов, В.П. Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий: в 2 т. / В.П. Зрелов. — Москва : Атомиздат, 1968. — 2 т.
24. Черенковские детекторы и их применение в науке и технике / Под ред. А.М. Балдина. — Москва : Наука, 1990. — 431 с.
25. Observation of Frequency-Locked Coherent Terahertz Smith-Purcell Radiation / S.E. Korbly [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94, № 5. — P. 054803.
26. Particle-in-cell simulation of coherent and superradiant Smith-Purcell radiation / D. Li [et al.] // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2006. — Vol. 9, №. 4. — P. 040701.

27. Observation of optical Smith-Purcell radiation at an electron beam energy of 855 MeV / G. Kube [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Vol. 65, № 5. — P. 056501.
28. Donohue, J.T. Simulation of Smith-Purcell radiation using a particle-in-cell code / J.T. Donohue, J. Gardelle // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. — 2005. — Vol. 8, № 6. — P. 060702.
29. Superradiant emission of Smith-Purcell radiation / H.L. Andrews [et al.] // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. — 2005. — Vol. 8, № 11. — P. 110702.
30. Optimization of Smith-Purcell radiation at very high energies / S.R. Trotz [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2000. — Vol. 61, №. 6. — P. 7057–7064.
31. Karlovets, D.V. Comparison of Smith-Purcell radiation models and criteria for their verification / D.V. Karlovets, A.P. Potylitsyn // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. — 2006. — Vol. 9, №. 8. — P. 080701.
32. Takabayashi, Y. Observation of parametric X-ray radiation by an imaging plate / Y. Takabayashi, A.V. Shchagin // *Nucl. Instr. and Meth. B*. — 2012. — Vol. 278. — P. 78–81.
33. Takabayashi, Y. Parametric X-ray radiation as a beam size monitor / Y. Takabayashi // *Phys. Lett. A*. — 2012. — Vol. 376, №. 35. — P. 2408–2412.
34. Generation and use of parametric X-rays with an electron linear accelerator / T. Akimoto [et al.] // *Nucl. Instr. and Meth. A*. — 2001. — Vol. 459, № 1-2. — P. 78–86.
35. Обнаружение параметрического рентгеновского излучения умеренно релятивистских протонов в кристаллах / Ю.Н. Адищев [и др.] // *Письма в ЖЭТФ*. — 2005. — Т. 81, № 6. — С. 305–308.
36. Gogolev, A. A possibility of transverse beam size diagnostics using parametric X-ray radiation / A. Gogolev, A.P. Potylitsyn, G. Kube // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2012. — Vol. 357, № 1. — P. 012018.
37. О возможности диагностики протонных пучков высоких энергий с помощью параметрического рентгеновского излучения в монокристаллах / М.Д. Бавижев [и др.] // *Журнал технической физики*. — 2001. — Т. 71, № 8. — С. 125–127.
38. Introduction to Nanophotonics / S.V. Gaponenko — Cambridge University Press, 2010. — 465 P.
39. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light (Second Edition) / J.D. Joannopoulos [et al.]. — Princeton University Press, 2011. — 304 P.
40. Photonic Crystals, Theory, Applications and Fabrication / D.W. Prather [et al.]. — New Jersey : Wiley, 2009. — 405 P.
41. Inoue, K. Photonic Crystals: Physics, Fabrication and Applications / K. Inoue, K. Ohtaka. — Berlin [etc.] : Springer, 2013. — 324 P.

42. Burstein, E. *Confined Electrons and Photons: New Physics and Applications* / E. Burstein, C. Weisbuch. — Springer Science & Business Media, 2012. — 907 P.

43. Пафомов, В.Е. Переходное излучение и черенковское излучение / В.Е. Пафомов // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 36, № 6. — С. 1853–1858.

44. Мандельштам, Л.И. Полное собрание трудов : в 5 т. / Л.И. Мандельштам ; под ред. М.А. Леонтовича. — Ленинград : Изд-во АН СССР, 1950. — Т. 5 — Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — 470 с.

45. Zouhdi, S. *Metamaterials and Plasmonics: Fundamentals, Modelling, Applications* / S. Zouhdi, A. Sihvola, A.P. Vinogradov. — Springer, 2008. — 305 P.

46. Sihvola, A. *Metamaterials in electromagnetics* / A. Sihvola // *Metamaterials*. — 2007. — Vol. 1, № 1. — P. 2–11.

47. Silveirinha, M.G. Subwavelength imaging at infrared frequencies using an array of metallic nanorods / M.G. Silveirinha, P.A. Belov, C.R. Simovski // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Vol. 75. — P. 035108. —

48. *Optical Effects Accompanying the Dynamical Bragg Diffraction in Linear 1D Photonic Crystals Based on Porous Silicon* / A. Maydykovskiy [et al.] // *Crystals*. — 2014. — Vol. 4, № 4. — P. 427–438.

49. *Optical Properties of Inverse Opal Photonic Crystals* / R.C. Schroden [et al.] // *Chemistry of Materials*. — 2002. — Vol. 14, № 8. — P. 3305–3315.

50. *Diffraction in crystalline colloidal-array photonic crystals* / S.A. Asher [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2004. — Vol. 69, № 6. — P. 066619.

51. van Driel, H.M. Multiple Bragg wave coupling in photonic band-gap crystals / H.M. van Driel, W.L. Vos // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 62, № 15. — P. 9872–9875.

52. Vorobev, V.V. Nondivergent Cherenkov Radiation in a Wire Metamaterial / V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 184801.

53. Grbic, A. Experimental verification of backward-wave radiation from a negative refractive index metamaterial / A Grbic, G.V. Eleftheriades // *J. Appl. Phys.* — 2002. — Vol. 92, № 10. — P. 5930–5935.

54. Fernandes, D.E. Cherenkov emission in a nanowire material / D.E. Fernandes, S.I. Maslovski, M.G. Silveirinha // *Phys. Rev. B*. — 2012. — Vol. 85, № 15. — P. 155107.

55. Tyukhtin, A.V. Cherenkov radiation in a metamaterial comprised of coated wires / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev // *J. of the Optical Society of America B*. — 2013. — Vol. 30, № 6. — P. 1524.

56. Tyukhtin, A.V. Radiation of charges moving along the boundary of a wire metamaterial / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev // Phys. Rev. E. — 2014. — Vol. 89, № 1. — P. 013202.

57. Silveirinha, M.G. Radiation from elementary sources in a uniaxial wire medium / M.G. Silveirinha, S.I. Maslovski // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 85, № 15. — P. 155125.

58. Vorobev, V.V. Radiation of a charge moving in wire metamaterial perpendicularly to the main axis / V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin // J. Phys. Conf. Ser. — 2012. — may. — Vol. 357. — P. 012006.

59. Tyukhtin, A.V. Radiation excited by a charged-particle bunch on a planar periodic wire structure / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, S.N. Galyamin // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2014. — Vol. 17, № 12. — P. 122802.

60. Baryshevsky, V.G. Spontaneous and induced parametric and Smith-Purcell radiation from electrons moving in a photonic crystal built from the metallic threads / V.G. Baryshevsky, A.A. Gurinovich // Nucl. Instr. and Meth. B. — 2006. — Vol. 252, № 1. — P. 92–101.

61. Baryshevsky, V.G. Quasi-Cherenkov parametric radiation from relativistic particles passing through a photonic crystal / V.G. Baryshevsky, A.A. Gurinovich // Nucl. Instr. Meth. B. — 2015. — Vol. 355. — P. 69–75.

62. Baryshevsky, V.G. Volume Free Electron Laser with a “Grid” Photonic Crystal in a Cylindrical Waveguide / V.G. Baryshevsky, P.V. Molchanov // Acta Physica Polonica Series A: General Physics. — 2009. — Vol. 115, № 6. — P. 971–972.

63. Experimental study of a volume free electron laser with a “grid” resonator / V.G. Baryshevsky [et al.] // Proc. of FEL 2006 BESSY, Berlin, Germany. — 2006. — P. 331–334.

64. Пинскер, З.Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах / З.Г. Пинскер. — Москва : Наука, 1974. — 369 с.

65. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. — Москва : Энергоатомиздат, 1995. — 320 с.

66. Барышевский, В.Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях / В.Г. Барышевский. — Минск : изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1982. — 256 с.

67. Морс, Ф.М. Методы теоретической физики: в 2 т. / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. — Москва : Издательство иностранной литературы, 1958. — 2 т.

68. Давыдов, А.С. Квантовая механика / А.С. Давыдов. — Москва : Наука, 1973. — 673 с.

69. Ландау, Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — 4-е изд., испр. — Москва : Наука, 1989. — 768 с.

70. Гольдбергер, М. Теория столкновений / М. Гольдбергер, К. Ватсон. — Москва : Мир, 1967. — 826 с.
71. Goldberger, M.L. Theory of the Refraction and the Diffraction of Neutrons by Crystals / M.L. Goldberger, F. Seitz // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 71, № 5. — P. 294–310.
72. Барышевский, В.Г. Дифракция нейтронов в поляризованном кристалле / В.Г. Барышевский // *ЖЭТФ.* — 1966. — Т. 51. — С. 1587–1591.
73. Ньютон, Р. Теория рассеяния волн и частиц / Р Ньютон. — Москва : Мир, 1969. — 607 с.
74. Elastic scattering of γ -rays and X-rays by atoms / P.P. Kane [et al.] // *Physics Reports.* — 1986. — Vol. 140, № 2. — P. 75–159.
75. Baryshevsky, V.G. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle / V.G. Baryshevsky // *Nucl. Instr. and Meth. B.* — 1997. — Vol. 122, № 1. — P. 13–18.
76. Пафомов, В.Е. Излучение электрона, пролетающего через пластинку / В.Е. Пафомов // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 33. — С. 1074–1075.
77. Барышевский, В.Г. О рассеянии света потоком электронов, проходящих через кристалл / В.Г. Барышевский // *Доклады АН БССР.* — 1971. — Т. 15, № 4. — С. 306–308.
78. Барышевский, В.Г. О переходном излучении гамма-квантов в кристалле / В.Г. Барышевский, И.Д. Феранчук // *ЖЭТФ.* — 1971. — Т. 61, № 3. — С. 944–948. — Поправка в *ЖЭТФ* 1973, т.64(2), с. 760.
79. Экспериментальное обнаружение параметрического рентгеновского излучения / Ю.Н. Адищев [и др.] // *Письма в ЖЭТФ.* — 1985. — Т. 41, № 7. — С. 295–297.
80. Angular distribution of parametric X-rays / V.G. Baryshevsky [et al.] // *Phys. Lett. A.* — 1985. — Vol. 110, № 9. — P. 477–479.
81. Барышевский, В.Г. ЛСЭ на параметрическом (квазичеренковском) излучении / В.Г. Барышевский, К.Г. Батраков, И.Я. Дубовская // *Вести АН БССР, сер. физ.-мат. наук.* — 1991. — Т. 1. — С. 53.
82. Baryshevsky, V.G. Parametric (quasi-Cerenkov) X-ray free electron lasers / V.G. Baryshevsky, K.G. Batrakov, I.Y. Dubovskaya // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 1991. — Vol. 24, № 8. — P. 1250–1257.
83. Baryshevsky, V.G. Parametric beam instability of relativistic charged particles in a crystal / V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk // *Phys. Lett. A.* — 1984. — Vol. 102. — P. 141–144.

84. Baryshevsky, V.G. Surface quasi-Cherenkov free-electron laser / V.G. Baryshevsky, K.G. Batrakov, I.Ya. Dubovskaya // Nucl. Instr. and Meth. A. — 1994. — Vol. 341, № 1-3. — P. 274–276.
85. Anishchenko, S.V. Cooperative parametric (quasi-Cherenkov) radiation produced by electron bunches in natural or photonic crystals / S.V. Anishchenko, V.G. Baryshevsky // Nucl. Instr. and Meth. B. — 2015. — Vol. 355. — P. 76–80.
86. Generation and use of parametric X-rays with an electron linear accelerator / T. Akimoto [et al.] // Nucl. Instr. and Meth. A. — 2001. — Vol. 459, № 1-2. — P. 78–86.
87. Sones, B. X-ray imaging with parametric X-rays (PXR) from a lithium fluoride (LiF) crystal / B. Sones, Y. Danon, R.C. Block // Nucl. Instr. Meth. A. — 2006. — Vol. 560, № 2. — P. 589–597.
88. Китайгородский, А.И. Рентгеноструктурный анализ / А.И. Китайгородский. — Москва : ГИТТЛ, 1950. — 651 с.
89. Хёнл, Х. Теория дифракции / Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. — Москва : Мир, 1964. — 428 с.
90. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — Москва : Наука, 1970. — 856 с.
91. Wire Metamaterials: Physics and Applications / C.R. Simovski [et al.] // Advanced Materials. — 2012. — Vol. 24, № 31. — P. 4229–4248.
92. Strong spatial dispersion in wire media in the very large wavelength limit / P.A. Belov [et al.] // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 67. — P. 113103.
93. Silveirinha, M.G. Nonlocal homogenization model for a periodic array of ε -negative rods / M.G. Silveirinha // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73. — P. 046612.
94. Silveirinha, M.G. Subwavelength imaging at infrared frequencies using an array of metallic nanorods / M.G. Silveirinha, P.A. Belov, C.R. Simovski // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 035108.
95. Maslovski, S.I. Wire media with negative effective permittivity: A quasi-static model / S.I. Maslovski, S.A. Tretyakov, P.A. Belov // Microwave Opt. Technol. Lett. — 2002. — Vol. 35, № 1. — P. 47–51.
96. Low frequency plasmons in thin-wire structures / J.B. Pendry [et al.] // J. Phys.: Condens. Matter. — 1998. — Vol. 10, № 22. — P. 4785.
97. Maslovski, S.I. Nonlocal permittivity from a quasistatic model for a class of wire media / S.I. Maslovski, M.G. Silveirinha // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 80. — P. 245101.
98. Kinetic-inductance-limited reset time of superconducting nanowire photon counters / A.J. Kerman [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2006. — Vol. 88, № 11. — P. 111116.

99. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. — Москва : Наука, 1989. — 544 с.
100. Маршалл, Т. Лазеры на свободных электронах / Т. Маршалл. — Москва : Мир, 1987. — 240 с.
101. Трубецков, Д.И. Лекции по СВЧ электронике для физиков: в 2 т. / Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. — Москва : Физматлит, 2003. — 2 т.
102. Лифшиц, Е.М. Физическая кинетика / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. — Москва : Наука, 1979. — 528 с.
103. Барышевский, В.Г. Поверхностное параметрическое излучение релятивистских частиц / В.Г. Барышевский // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 299, № 6. — С. 1363–1366.
104. Барышевский, В.Г. Квантовая теория рентгеновского параметрического генератора с учетом многоволновой дифракции / В.Г. Барышевский, И.Д. Феранчук // Вести АН БССР, сер. физ.-мат. наук. — 1985. — Т. 3. — С. 90.
105. Барышевский, В.Г. Неустойчивость волн в периодической среде / В.Г. Барышевский // Доклады АН БССР. — 1987. — Т. 31, № 12. — С. 1089.
106. Барышевский, В.Г. Черенковская неустойчивость пучка заряженных частиц, проходящего через трехмерную пространственно-периодическую среду / В.Г. Барышевский, И.Я. Дубовская, И.Д. Феранчук // Вести АН БССР, сер. физ.-мат. наук. — 1988. — Т. 1. — С. 92–97.
107. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике / Н.С. Ерохин [и др.]. — Москва : Наука, 1982. — 270 с.
108. Baryshevsky, V.G. Volume Free Electron Lasers / V.G. Baryshevsky // Nucl. Instr. and Meth. A. — 2000. — Vol. 445, № 1-3. — P. 281–283.
109. Baryshevsky, V.G. Spontaneous and Induced Radiation by Relativistic Particles in Natural and Photonic Crystals. Crystal X-ray Lasers and Volume Free Electron Lasers (VFEL) / V.G. Baryshevsky // [Electronic resource]. — 2011. — Mode of Access: <http://arxiv.org/abs/1101.0783>. — Date of Access: 04.01.2011.
110. Baryshevsky, V.G. Spontaneous and induced radiation by electrons/positrons in natural and photonic crystals. Volume free electron lasers (VFELs): From microwave and optical to X-ray range / V.G. Baryshevsky // Nucl. Instr. and Meth. B. — 2015. — Vol. 355. — P. 17–23.
111. Baryshevsky, V.G. High power microwave and optical volume free electron lasers (VFELs) / V.G. Baryshevsky // [Electronic resource]. — 2012. — Mode of Access: <http://arxiv.org/abs/1211.4769>. — Date of Access: 20.11.2012.

112. Baryshevsky, V.G. Application of volume diffraction grating for TeraHertz lasing in volume FEL (VFEL) / V.G Baryshevsky, K.G Batrakov, V.I Stolyarsky // Nucl. Instr. and Meth.. — 2003. — Vol. 507, № 1-2. — P. 93–96.
113. Давыдов, А.С. Теория атомного ядра / А.С. Давыдов. — Москва : Физматгиз, 1958. — 611 с.
114. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. — Москва : Наука, 1964. — 343 с.
115. Batterman, B. Dynamical Diffraction of X Rays by Perfect Crystals / B. Batterman, H. Cole // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36, № 3. — P. 681–717.
116. Wait, J.R. Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder at oblique incidence / J.R. Wait // Canadian Journal of Physics. — 1955. — Vol. 33, № 5. — P. 189–195.
117. Belov, P.A.. Dispersion and reflection properties of artificial media formed by regular lattices of ideally conducting wires / P.A. Belov, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2002. — Vol. 16, № 8. — P. 1153–1170.
118. Agranovich, V.M. Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons / V.M. Agranovich, V.L. Ginzburg. — Springer, 1984. — 441 с.
119. Таблицы физических величин. Справочник. / Под ред. И.К. Кикоина. — Москва : Атомиздат, 1976. — 1005 с.
120. Johnson, P.B. Optical Constants of the Noble Metals / P.B. Johnson, R.W. Christy // Phys. Rev. B. — 1972. — Vol. 6, № 12. — P. 4370–4379.
121. Electron, photon, and ion beams from the relativistic interaction of Petawatt laser pulses with solid targets / S.P. Hatchett [et al.] // Physics of Plasmas. — 2000. — Vol. 7, № 5. — P. 2076–2082.
122. Fast Proton Generation from Ultrashort Laser Pulse Interaction with Double-Layer Foil Targets / J. Badziak [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, № 21. — C. 215001.
123. Laser-driven generation of high-current ion beams using skin-layer ponderomotive acceleration / J. Badziak [et al.] // Laser and Particle Beams. — 2005. — Vol. 23, № 4. — P. 401–409.
124. Highly Efficient Relativistic-Ion Generation in the Laser-Piston Regime / T. Esirkepov [et al.] // Phys. Rev. Lett.. — 2004. — Vol. 92, № 17. — C. 175003.
125. Generation of GeV protons from 1 PW laser interaction with near critical density targets / S.S. Bulanov [et al.] // Physics of Plasmas. — 2010. — Vol. 17, № 4. — P. 043105.

126. Proton acceleration by single-cycle laser pulses offers a novel monoenergetic and stable operating regime / M.L. Zhou [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2016. — Vol. 23, № 4. — P. 043112.

127. Few femtosecond, few kiloampere electron bunch produced by a laser-plasma accelerator / O. Lundh [et al.] // *Nature Physics*. — 2011. — Vol. 7, № 3. — P. 219–222.

128. Experimental observation of femtosecond electron beam microbunching by inverse free-electron-laser acceleration / Y. Liu [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80, № 20. — P. 4418.

129. Femtosecond electron bunch generation using photocathode rf gun / K. Kan [et al.] // *Proc. of the FEL2010 Conf., Malmo, Sweden*. — 2010. — P. 366–369.

130. SwissFEL-Conceptual design report: Report of Paul Scherrer Institute (PSI) / Executor: R. Ganter // [Electronic resource]. — 2010. — Mode of Access: ftp://ftp.psi.ch/psi/SwissFEL_CDR/SwissFEL_CDR_V20_23.04.12.pdf. — Date of Access: 23.04.2012.

131. SwissFEL: The Swiss X-ray Free Electron Laser / Ch. Milne [et al.] // *Applied Sciences*. — 2017. — Vol. 7, № 7. — P. 720.

132. Tunable High-Intensity Electron Bunch Train Production Based on Nonlinear Longitudinal Space Charge Oscillation / Zhen Zhang [et al.] // *Phys. Rev. Lett.*. — 2016. — Vol. 116, № 18. — C. 184801.

133. Influence of space charge effect in femtosecond electron bunch on coherent transition radiation spectrum / M. Shevelev [et al.] // *Nucl. Instr. and Meth. B*. — 2017. — Vol. 402. — P. 134–138.

134. Baryshevsky, V.G. Parametric X-rays from ultrarelativistic electrons in a crystal: theory and possibilities of practical utilization / V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk // *J. Phys. France*. — 1983. — Vol. 44, № 8. — P. 913–922.

135. Designed ultrafast optical nonlinearity in a plasmonic nanorod metamaterial enhanced by nonlocality / G.A. Wurtz [et al.] // *Nature Nanotechnology*. — 2011. — Vol. 6. — P. 107–111.

136. Guided plasmonic modes in nanorod assemblies: strong electromagnetic coupling regime / G.A. Wurtz [et al.] // *Optics Express*. — 2008. — Vol. 16, № 10. — P. 7460–7470.

137. First lasing of a volume FEL (VFEL) at a wavelength range $\lambda \sim 4\text{--}6$ mm / V.G. Baryshevsky [et al.] // *Nucl. Instr. Meth. A*. — 2002. — Vol. 483. — P. 21–23.

138. Proof of Principle: The Single Beam Photonic Free-Electron Laser / T. Denis [et al.] // *Proc. of FEL'2010 Conference, 23–27 August 2010, Hilton Malmö City, Sweden*. — 2010. — P. 644–647.

139. Photonic Free-Electron Lasers / P. J. M. van der Slot [et al.] // IEEE Photonics Journal. — 2012. — Vol. 4. — P. 570–573.

140. Frolov, N. Photonic Crystal Application for Microwaves Output Induced by the Beam-Plasma Instability in the Absence of Ions / N. Frolov, S. Kurkin // Proc. of 2018 IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC). — 2018. — P. 267–268.

141. Джексон, Дж. Классическая электродинамика / Дж. Джексон. — Москва : Мир, 1965. — 703 с.

142. Лебедев, И.В. Техника и приборы СВЧ: в 2 т. / И.В. Лебедев. — Москва : Высшая школа, 1970. — 2 т.

143. Барышевский, В.Г. Индуцированное рентгеновское излучение релятивистского электронного пучка в лазере на свободных электронах с распределённой обратной связью в трёхмерной пространственно-периодической среде / В.Г. Барышевский, И.Я. Дубовская // Вести АН БССР, сер. физ.-энерг. наук. — 1990. — Т. 1. — С. 30–36.

144. Wortman, D.E. The orotron / D.E. Wortman, R.P. Leavitt // Infrared and Millimeter Waves. — 1983. — Vol. 7. — P. 321–375.

145. Prudnikov, A.P. Integrals and Series: Special functions. Vol.2 / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev. — CRC Press, 1986. — 750 P.

146. Bateman, H. Higher transcendental functions, Vol. 1 / H. Bateman, A. Erdelyi. — New York : Mc Graw-Hill, 1953. — 317 P.

Список публикаций соискателя

Статьи в рецензируемых журналах

1–А. Барышевский, В.Г. О возможности черенковского излучения в фотонном кристалле, образованном параллельными металлическими нитями / В.Г. Барышевский, Е.А. Гурневич // Вестник БГУ, сер. 1. — 2009. — Т. 3. — С. 38–44.

2–А. Generation of medical X-ray and THz beams of radiation using table-top accelerators / V.G. Baryshevsky, A.A. Gurinovich, E.A. Gurnevich, A.S. Lobko // Il Nuovo Cimento C. — 2011. — Vol. 34, no. 4. — P. 199–205.

3–А. Baryshevsky, V.G. Dynamical diffraction theory of waves in photonic crystals built from anisotropically scattering elements / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // J. Nanophotonics. — 2012. — Vol. 6, no. 1. — P. 061713.

4–А. Baryshevsky, V.G. The Electron Beam Instability in a One-Dimensional Cylindrical Photonic Crystal / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2012. — Vol. 15, no. 2. — P. 155–162.

5–А. Baryshevsky, V.G. Cherenkov and parametric (quasi-Cherenkov) radiation produced by a relativistic charged particle moving through a crystal built from metallic wires / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // Nucl. Instr. and Meth. B. — 2017. — Vol. 402. — P. 30–34.

Статьи в материалах конференций

6–А. Volume free electron laser with a “grid” photonic crystal with variable period: theory and experiment / V.G. Baryshevsky, N.A. Belous, A.A. Gurinovich, E.A. Gurnevich, V.A. Evdokimov, P.V. Molchanov // Proc. of FEL’09 Conference, 23–28 August 2009, Liverpool. — 2009. — P. 134–137.

7–А. Baryshevsky, V.G. The possibility of cherenkov radiation generation in a photonic crystal formed by parallel metallic threads / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. [Electronic resource]. — 2010. — Mode of Access: <http://dx.doi.org/10.1109/MSMW.2010.5546019>. — Date of Access: 19.08.2010.

8–А. Experimental studies of Volume FELs with a photonic crystal / V.G. Baryshevsky, A.A. Gurinovich, N.A. Belous, E.A. Gurnevich, V.A. Evdokimov, P.V. Molchanov // Proc. of 35th International Conference on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves, 5–10 September 2010, Rome, Italy, We-F2.2. [Electronic resource]. — 2010. — Mode of Access: <http://dx.doi.org/10.1109/ICIMW.2010.5612862> — Date of Access: 19.08.2010.

9–А. Experimental Studies of Volume Fels With a Photonic Crystal Made of Foils / V.G. Baryshevsky, A.A. Gurinovich, N.A. Belous, V.A. Evdokimov, E.A. Gurnevich, P.V. Molchanov // Proc. of FEL’2010 Conference, 23–27 August 2010, Hilton Malmö City, Sweden. — 2010. — P. 632–635.

10–А. Барышевский, В.Г. Возможность черенковского излучения в фотонном кристалле, образованном параллельными металлическими нитями / В.Г. Барышевский, Е.А. Гурневич // Сборник научных трудов международной школы-конференции молодых учёных и специалистов “Современные проблемы физики”, Минск, 9–11 июня 2010 / Под ред. В. В. Машко, В. З. Зубевича, А. В. Буцеля. — 2010. — С. 33–38.

11–А. Барышевский, В.Г. Динамическая дифракция волн в трёхмерных естественных и фотонных кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами / В.Г. Барышевский, Е.А. Гурневич // Сборник научных трудов международной школы-конференции молодых учёных и специалистов “Современные проблемы физики”, Минск, 11–13 июня 2014 / Под ред. В. В. Машко, Е. В. Шабуня-Клячковской, Е. А. Сафронова. — 2014. — С. 21–26.

12–А. Baryshevsky, V.G. Quasi-Cherenkov radiation in a photonic crystal built from parallel metallic wires in the case of anisotropic scattering of waves by the wire / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // Nonlinear Dynamics and Applications. Proceedings of the XXII Annual Seminar “Nonlinear Phenomena in Complex Systems” (NPCS’2015), May 19-22, 2015, Minsk, Belarus. — Vol. 21. — 2015. — P. 126–138.

13–А. Baryshevsky, V.G. Generation of THz radiation by femtosecond electron bunches in photonic crystals of free electron lasers / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // Nonlinear Dynamics and Applications. Proceedings of the XXIII Annual Seminar “Nonlinear Phenomena in Complex Systems” (NPCS’2016), May 24–27, 2016, Minsk, Belarus. — Vol. 22. — 2016. P. 129–136.

Тезисы докладов

14–А. Baryshevsky, V.G. Long-wave approximation in the theory of dynamic diffraction of waves in photonic crystals formed by metallic threads / V.G. Baryshevsky, Y.A. Hurnevich // Abstracts of International Conference Days on Diffraction’2009, St. Petersburg, May 26–29. — 2009. — P. 106.

15–А. Гурневич, Е.А. Возможность черенковского излучения в фотонном кристалле, образованном параллельными металлическими нитями / Е.А. Гурневич // Программа и краткие тезисы докладов международной школы-конференции молодых учёных и специалистов “Современные проблемы физики”, Минск, 9–11 июня 2010 / — 2010. — С. 4.

16–А. Барышевский, В. Г. Динамическая дифракция волн в трёхмерных естественных и фотонных кристаллах, образованных анизотропно рассеивающими центрами / В.Г. Барышевский, Е.А. Гурневич // Программа и краткие тезисы докладов международной школы-конференции молодых учёных и специалистов “Современные проблемы физики”, Минск, 11–13 июня 2014 / — 2014. — С. 4.

17–А. Baryshevsky, V.G. Cherenkov and parametric (quasi-Cherenkov) radiations produced by a relativistic charged particle moving through crystals built from metallic wires / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // Channeling 2016 – Book of Abstracts of 7th International Conference Charged & Neutral Particles Channeling Phenomena, 25–30 September 2016, Sirmione-Dezzenano del Garda, Italy. — 2016. — P. 48.

18–А. VFEL-based THz radiation sources with resonators formed by metallic wires / V.G. Baryshevsky, A.A. Gurinovich, E.A. Gurnevich, P.V. Molchanov // Channeling 2016 – Book of Abstracts of 7th International Conference Charged & Neutral Particles Channeling Phenomena, 25–30 September 2016, Sirmione-Dezzenano del Garda, Italy. — 2016. — P. 136.

Препринты

19–А. Baryshevsky, V.G.. The electron beam instability in a one-dimensional cylindrical photonic crystal / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // [Electronic resource]. — 2011. — Mode of Access: <https://arxiv.org/abs/1105.2873>. — Date of Access: 14.05.2011.

20–А. Baryshevsky, V.G.. Refraction and Diffraction of Waves in Electromagnetic (Photonic) Crystals Formed by Anisotropically Scattering Elements / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // [Electronic resource]. — 2012. — Mode of Access: <https://arxiv.org/abs/1205.6318>. — Date of Access: 29.05.2012.

21–А. Baryshevsky, V.G.. Multiple Scattering of Waves in 3D Crystals (Natural or Photonic) Formed by Anisotropically Scattering Centers / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // [Electronic resource]. — 2013. — Mode of Access: <https://arxiv.org/abs/1307.1544>. — Date of Access: 05.07.2013.

22–А. Baryshevsky, V.G.. Cherenkov and parametric (quasi-Cherenkov) radiation from relativistic charged particles moving in crystals formed by metallic wires / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // [Electronic resource]. — 2016. — Mode of Access: <https://arxiv.org/abs/1609.05689>. — Date of Access: 19.09.2016.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

РАЗЛОЖЕНИЕ $\Psi_{sc,0}$ НА ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Преобразуем выражение (2.23) для рассеянной центром (m, n) волны $\Psi_{sc}^{(m,n)}$ с помощью формул (2.24)-(2.25). Для начала вычислим коэффициенты α_{lj}

$$\alpha_{lj} = (2l + 1) \int_{-1}^1 P_j\left(\frac{r}{r_{m,n}}x\right) P_l(x) dx. \quad (\text{A.1})$$

Поскольку $P_j(rx/r_{m,n})$ есть многочлен степени j от аргумента $rx/r_{m,n}$

$$P_j\left(\frac{r}{r_{m,n}}x\right) = \sum_{k=0}^j a_k^{(j)} \left(\frac{r}{r_{m,n}}\right)^k x^k,$$

то величины α_{lj} (в соответствии с (A.1)) будут в общем случае многочленами степени j от аргумента $r/r_{m,n}$

$$\alpha_{lj} = \sum_{k=0}^j c_k \left(\frac{r}{r_{m,n}}\right)^k.$$

Так как нас интересует поведение волны $\Psi_{sc}^{(m,n)}$ вблизи опорного рассеивателя, т.е. при $r \rightarrow 0$, то мы сохраним в разложении α_{lj} по степеням $r/r_{m,n}$ только первый ненулевой член. Учтём также, что интеграл

$$\int_{-1}^1 P_l(x) x^m dx = 0$$

при всех $m < l$ (см. [145]). Тогда получаем, что $\alpha_{lj} \equiv 0$ при $j < l$, и

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha_{lj} = a_l^{(j)} \left(\frac{r}{r_{m,n}}\right)^l (2l + 1) \int_{-1}^1 P_l(x) x^l dx \quad (\text{A.2})$$

при $j \geq l$. Кроме того, легко показать, что $\alpha_{lj} \equiv 0$ если $j > l$ и $j - l = 1, 3, 5, \dots$ (т.е. если чётности j и l не совпадают) из-за равенства нулю соответствующих коэффициентов $a_l^{(j)}$. Используя известные значения коэффициентов $a_l^{(j)}$ многочлена Лежандра степени j , и интеграла в (A.2) (см. [145, 146]), получаем выражение

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha_{lj} = (2l + 1) \cdot \left(\frac{r}{r_{m,n}}\right)^l \cdot \frac{2 \cdot l!}{(2l + 1)!!} \cdot \frac{1}{2^j} \cdot (-1)^{(j-l)/2} \frac{j!}{\left(\frac{j-l}{2}\right)! \left(\frac{j+l}{2}\right)!} \frac{(j+l)!}{j! l!},$$

справедливое если $(j - l)$ является неотрицательным чётным числом; во всех остальных случаях коэффициенты α_{lj} тождественно равны 0. Вводя новый индекс j' с помощью соотношения $j = l + 2j'$, предыдущее соотношение можно записать в более удобной форме (штрих у нового индекса опущен):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha_{l,l+2j} = \left(\frac{r}{r_{m,n}} \right)^l \frac{1}{2^{l+2j-1}} \frac{(-1)^j (2(l+j))!}{(2l-1)!! j!(l+j)!}. \quad (\text{A.3})$$

После подстановки выражения (A.3) в формулы (2.23)-(2.24) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{sc}^{(m,n)} &= ik \sum_{j=0}^{\infty} i^j F_j h_j(kr_{m,n}) P_j \left(\frac{r}{r_{m,n}} \cos \theta \right) = \\ &= ik \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} i^j F_j h_j(kr_{m,n}) \frac{\alpha_{lj}}{2} \right\} = \\ &= ik \sum_{l=0}^{\infty} i^l r^l P_l(\cos \theta) \frac{1}{2^l} \frac{1}{(2l-1)!!} \left\{ \frac{1}{r_{m,n}^l} \sum_{j=0}^{\infty} F_{l+2j} h_{l+2j}(kr_{m,n}) \frac{1}{2^{2j}} \frac{(2(l+j))!}{j!(l+j)!} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

т.е. в точности выражение (2.26).

Чтобы получить разложение $\Psi_{sc,0}$ на парциальные волны, необходимо просуммировать полученное выражение по всем m, n кроме $(m, n) = (0, 0)$. Для этого, очевидно, достаточно вычислить значения сумм $\sum_{m,n} h_{l+2j}(kr_{m,n}) r_{m,n}^{-l}$, где $r_{m,n} = \sqrt{(am)^2 + (bn)^2}$. Как уже указывалось в разделе 2.2, будем интересоваться только действительной частью этих сумм. Для удобства введем обозначение

$$\Sigma_{lj} \equiv \text{Re} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{h_{l+2j}(kr_{m,n})}{r_{m,n}^l}.$$

Первая сумма легко вычисляется, например, с использованием правила суммирования Пуассона:

$$\Sigma_{00} = \frac{2\pi}{k^2 ab} - 1. \quad (\text{A.5})$$

При вычислении величин Σ_{l0} при $l > 0$ будет полезно следующее соотношение для сферических функций Ганкеля [67]:

$$\frac{h_{l+1}(kr)}{r^{l+1}} = \frac{1}{k^{l+2}} \int_0^k k^{l+2} \frac{h_l(kr)}{r^l} dk. \quad (\text{A.6})$$

Используя метод математической индукции и формулу (A.6), легко доказать, что

$$\Sigma_{l0} = k^l \frac{1}{(2l-1)!!} \left\{ \frac{2\pi}{k^2 ab} - \frac{1}{2l+1} \right\} \quad (\text{A.7})$$

для всех l .

Для вычисления величин Σ_{lj} при $j > 0$ воспользуемся рекуррентным соотношением между сферическими функциями Ганкеля с соседними индексами [67], записав его в следующем виде

$$h_{l+2j}(kr) = \frac{2l+4j-1}{kr} h_{l+2j-1}(kr) - h_{l+2j-2}(kr). \quad (\text{A.8})$$

Подставляя в это выражение $j = 1, 2, \dots$, получаем для нескольких первых сумм следующие значения:

$$\begin{aligned} \Sigma_{l1} &= k^l \frac{2\pi}{k^2 ab} \frac{2}{(2l+1)!!}, \\ \Sigma_{l2} &= k^l \frac{2\pi}{k^2 ab} \frac{8}{(2l+3)!!}, \\ \Sigma_{l3} &= k^l \frac{2\pi}{k^2 ab} \frac{48}{(2l+5)!!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Несложно догадаться, что общее выражение для Σ_{lj} при $j > 0$ будет имеет вид

$$\Sigma_{lj} = k^l \frac{2\pi}{k^2 ab} \frac{2^j j!}{(2l+2j-1)!!}. \quad (\text{A.9})$$

Равенство (A.9) строго доказывается методом математической индукции.

Преобразовывая двойные факториалы в выражениях (A.7) и (A.9) по формуле $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$, получаем окончательные выражения для величин Σ_{lj}

$$\Sigma_{lj} = k^l \cdot 2^l \cdot \frac{2^{2j-1}(l+j-1)!j!}{(2l+2j-1)!} \cdot \frac{2\pi}{k^2 ab}, \quad j > 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\Sigma_{l0} = k^l \cdot 2^l \cdot \frac{2^{-1}(l-1)!}{(2l-1)!} \left\{ -\frac{1}{2l+1} + \frac{2\pi}{k^2 ab} \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Используя (A.4) и (A.10)-(A.11) после элементарных преобразований находим

искомое разложение для волны $\Psi_{sc,0}$ при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Psi_{sc,0} &= \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \Psi_{sc}^{(m,n)} \approx \\ &\approx ik \sum_{l=0}^{\infty} i^l r^l k^l P_l(\cos \theta) \frac{1}{(2l-1)!!} \left\{ -\frac{1}{2l+1} F_l + \frac{2\pi}{k^2 ab} \sum_{j=0}^{\infty} F_{l+2j} \right\}. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Дисперсионное уравнение для кристалла из параллельных металлических нитей, справедливое при $0 < k_\rho R \lesssim 1$, имеет вид

$$\det D = 0, \quad (\text{Б.1})$$

где элементы матрицы D определяются выражениями

$$\begin{aligned} D_{11} &= (\alpha B_0 + C_1)(iB'_1 + C_7) + i(2\alpha C_9^2 - \alpha C_8^2 + \beta C_8 C_2) + \\ &\quad + (3\alpha C_8 C_9 - \beta C_9 C_2), \\ D_{12} &= -C_3(iB'_1 + C_7) - i\beta C_4 C_8 + \beta C_4 C_9, \\ D_{13} &= C_2(iB'_1 + C_7) + \frac{i}{\beta} C_8 (C_1 - (1 - \beta^2) C_5) - \frac{1}{\beta} C_9 (C_1 - (1 - \beta^2) C_5) + \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta} B'_1 C_9 - \frac{\alpha}{\beta} C_8 C_7, \\ D_{21} &= -C_3, \\ D_{22} &= \frac{\alpha}{1 - \beta^2} B_1 + C_5, \\ D_{23} &= -C_4, \\ D_{31} &= \beta^2 C_2 (iB_0 + C_6) + i\beta C_1 C_8 - \beta C_1 C_9 - \alpha\beta C_9 B_0 - \alpha\beta C_8 C_6, \\ D_{32} &= -\beta^2 C_4 (iB_0 + C_6) - i\beta C_3 C_8 + \beta C_3 C_9, \\ D_{33} &= (\alpha B'_1 + C_1 - C_5 + \beta^2 C_5)(iB_0 + C_6) - i(2\alpha C_9^2 - \alpha C_8^2 - \beta C_8 C_2) - \\ &\quad - (3\alpha C_8 C_9 + \beta C_9 C_2), \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

где $\alpha = \frac{k_{z0} b}{2\pi}$, $\beta = \frac{k_y}{k_\rho}$, а величины B_0, B_1, B'_1 выражаются через амплитуду рассеяния на нити следующим образом:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1 + i\pi f_0 - S'_1 f_0}{f_0}, \\ B_1 &= \frac{1 + i\pi f_1/2 - S'_3 f_1}{f_1}, \\ B'_1 &= \frac{1 + i\pi f_1/2 + (S'_3 - S'_1) f_1}{f_1}, \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

а суммы S'_n и C_n равны

$$\begin{aligned}
S'_1 &= 2 \left(\log \frac{k_\rho b}{4\pi} + C \right) - \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{1}{|n|} + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \left(\frac{2\pi}{\kappa_n b} - \frac{1}{|n|} \right), \\
S'_3 &= \log \frac{k_\rho b}{4\pi} + C - \frac{1}{2} + \frac{2\pi^2 + 3k_y^2 b^2}{3k_\rho^2 b^2} + \frac{2\pi}{k_\rho b} \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \left(\frac{|k_{yn}|}{k_\rho} - \frac{k_\rho b}{4\pi |n|} \right) + \\
&\quad + \frac{2\pi}{k_\rho b} \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \left(\frac{|k_{yn}|}{k_\rho} - \frac{\kappa_n}{k_\rho} - \frac{k_\rho b}{4\pi |n|} \right), \\
C_1 &= -\frac{\sin k_z a}{\cos k_z a - \cos q_z a} - \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{\sin k_{zn} a}{\cos k_{zn} a - \cos q_z a} \frac{k_z}{k_{zn}} - \\
&\quad - \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \left(-1 + \frac{\sinh \kappa_n a}{\cosh \kappa_n a - \cos q_z a} \right) \frac{k_z}{\kappa_n}, \\
C_2 &= -\frac{\sin k_z a}{\cos k_z a - \cos q_z a} - \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{\sin k_{zn} a}{\cos k_{zn} a - \cos q_z a} \frac{k_z k_{yn}}{k_{zn} k_y} - \\
&\quad - \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \left(-1 + \frac{\sinh \kappa_n a}{\cosh \kappa_n a - \cos q_z a} \right) \frac{k_z k_{yn}}{\kappa_n k_y}, \\
C_3 &= \frac{\sin q_z a}{\cos k_z a - \cos q_z a} + \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{\sin q_z a}{\cos k_{zn} a - \cos q_z a} + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{\sin q_z a}{\cosh \kappa_n a - \cos q_z a}, \\
C_4 &= \frac{\sin q_z a}{\cos k_z a - \cos q_z a} + \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{\sin q_z a}{\cos k_{zn} a - \cos q_z a} \frac{k_{yn}}{k_y} + \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{\sin q_z a}{\cosh \kappa_n a - \cos q_z a} \frac{k_{yn}}{k_y}, \\
C_5 &= -\frac{\sin k_z a}{\cos k_z a - \cos q_z a} - \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{\sin k_{zn} a}{\cos k_{zn} a - \cos q_z a} \frac{k_{zn}}{k_z} + \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \left(-1 + \frac{\sinh \kappa_n a}{\cosh \kappa_n a - \cos q_z a} \right) \frac{\kappa_n}{k_z}, \\
C_6 &= \frac{2\pi}{k_z b} \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{k_z}{k_{zn}} \right), \quad C_7 = \frac{2\pi k_y^2}{k_z b k_\rho^2} \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{k_z k_{yn}^2}{k_{zn} k_y^2} \right), \\
C_8 &= -2 \frac{k_y}{k_\rho} + \frac{2\pi}{k_\rho b} \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{k_{yn}}{\kappa_n}, \quad C_9 = \frac{2\pi k_y}{k_z b k_\rho} \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{k_z k_{yn}}{k_{zn} k_y} \right),
\end{aligned} \tag{B.4}$$

где $\kappa_n = \sqrt{k_{yn}^2 - k_\rho^2}$, а суммирование ведется по следующим областям:
 $\mathbb{N}_1 : N_1 \leq n \leq N_2, n \neq 0, \mathbb{N}_2 : n \in (-\infty; N_1) \cup (N_2, +\infty), N_1 = \left[\frac{(k_y - k_\rho)b}{2\pi} \right],$

(B.5)

$N_2 = \left[\frac{(k_y + k_\rho)b}{2\pi} \right]$. Обратим внимание, что все приведенные в (Б.5) суммы являются действительными, а их значения не зависят от характеристик рассеивающих элементов (нитей), из которых составлен кристалл. Функции S'_1, S'_2 и C_6-C_9 зависят только от частоты и направления распространения волны (от k_y и k_ρ) и от периода кристалла, функции C_1-C_5 , кроме того, зависят ещё от искомой величины z -компоненты волнового вектора в кристалле q_z . Если рассеяние на отдельной нити является упругим (что соответствует идеально проводящим нитям), величины B_0, B_1 и B'_1 являются чисто действительными, что легко показать с помощью оптической теоремы, см. [З-А, 69]. Можно показать, что в этом случае решения q_z дисперсионного уравнения также будут чисто действительными (в полосе пропускания), т.е. ослабление волны в кристалле будет отсутствовать. Если же нити имеют конечную проводимость, решения q_z будут в общем случае комплексными величинами.

Рассмотрим несколько случаев, когда дисперсионное уравнение можно существенно упростить. Пусть $k_y b = \pi m$, где $m \neq 0$ – целое число, т.е. в кристалле точно выполнены условия дифракции для волновых векторов $\mathbf{k}, \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$ с вектором обратной решётки, равным $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_y = -\frac{2\pi m}{b} \mathbf{e}_y$. В этом случае сумма $S_2 = C_8 + iC_9$ (см. (3.34)) тождественно равна нулю, и, следовательно, равны нулю коэффициенты C_8 и C_9 ; кроме того, легко видеть, что $C_2 = C_4 = 0$. При таких условиях дисперсионное уравнение можно записать в действительных переменных следующим образом:

$$(\alpha B'_1 + C_1 - (1 - \beta^2)C_5) ((\alpha B_0 + C_1)(\alpha B_1 + (1 - \beta^2)C_5) - (1 - \beta^2)C_3^2) = 0. \quad (\text{Б.6})$$

Нетрудно найти приближенное аналитическое решение этого уравнения в простейших случаях. Пусть, например, $k_x = 0, k_y = \pi/b, ka, kb < 2\pi, \varepsilon_1 = \mu_1 = 1$, а для волновых векторов k и q выполняется соотношение $|q^2/k^2 - 1| \ll 1$. Тогда

$$C_1 \approx C_5 \approx -C_3 \approx -\frac{4}{ka(q^2/k^2 - 1)} \frac{k_z}{k}, \quad (\text{Б.7})$$

и после простых преобразований решения уравнения (Б.6) можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{q_1^2}{k^2} = 1 + \frac{8\pi}{k^2 \Omega_2} \left\{ \frac{f_0}{1 + i\pi f_0 - S'_1 f_0} + \frac{f_1}{1 + i\pi f_1/2 - S'_3 f_1} \frac{k_z^2}{k^2} \right\}, \\ \frac{q_2^2}{k^2} = 1 + \frac{8\pi}{k^2 \Omega_2} \frac{f_1}{1 + i\pi f_1/2 + (S'_3 - S'_1) f_1} \frac{k_y^2}{k^2} \end{cases} \quad (\text{Б.8})$$

С другой стороны, в случае двухволновой дифракции для распространяющихся в кристалле электромагнитных волн справедлива следующая система

динамических уравнений [61]:

$$\begin{cases} \left(\frac{q^2}{k^2} - 1 - g_0^s \right) \mathbf{E}^s(\mathbf{q}) - g_{-\tau}^s \mathbf{E}^s(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}) = 0, \\ -g_{\tau}^s \mathbf{E}^s(\mathbf{q}) + \left(\frac{(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau})^2}{k^2} - 1 - g_0^s \right) \mathbf{E}^s(\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}) = 0, \end{cases} \quad (\text{Б.9})$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки кристалла, \mathbf{q} – волновой вектор в кристалле, индекс s нумерует два возможных состояния поляризации, g_{τ} – коэффициенты разложения эффективной диэлектрической восприимчивости кристалла в ряд Фурье по векторам обратной решетки:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) - 1 = \sum_{\boldsymbol{\tau}} g_{\boldsymbol{\tau}} e^{i\boldsymbol{\tau}\mathbf{r}}.$$

Дисперсионное уравнение, являющееся следствием системы (Б.9), имеет простой вид в рассматриваемом случае:

$$(q^2 - k^2(1 + g_0))^2 - k^4 g_{\tau}^2 = 0.$$

Его корни

$$\frac{q_{1,2}^2}{k^2} = 1 + g_0 \pm g_{\tau}.$$

Сравнивая эти выражения с (Б.8), можно найти неизвестные величины g_0 и g_{τ} . Если амплитуда рассеяния мала, то мы приходим к результату, хорошо согласующемуся с выводами работы [3–А]:

$$\begin{cases} g_0 \approx \frac{4\pi}{k^2 \Omega_2} \left\{ \frac{f_0}{1 + i\pi f_0} + \frac{f_1}{1 + i\pi f_1/2} \right\}, \\ g_{\tau} \approx \frac{4\pi}{k^2 \Omega_2} \left\{ \frac{f_0}{1 + i\pi f_0} + \frac{f_1}{1 + i\pi f_1/2} \cos 2\theta_B \right\}, \end{cases} \quad (\text{Б.10})$$

где $\cos 2\theta_B = \cos^2 \theta_B - \sin^2 \theta_B = \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}$.

Еще более просто дисперсионное уравнение выглядит в случае нормального падения волны на кристалл ($k_x = k_y = 0$). Поскольку при этом величина F'_1 (см. (3.32)) тождественно равна нулю, то следуя приведенным в разделе 3.3 рассуждениям, вместо системы из трех уравнений (3.44) мы придем к системе всего из двух уравнений (два первых уравнения системы (3.44), в которых следует положить $F'_{1n} = 0$). Условие равенства нулю определителя этой системы в обозначениях (Б.2) запишется в виде

$$D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} = 0. \quad (\text{Б.11})$$

Учитывая, что при этом, как и в рассмотренном выше случае дифракции, коэффициенты $C_8 = C_9 = 0$, дисперсионное уравнение можно записать в явном виде через амплитуды рассеяния электромагнитной волны на отдельной нити:

$$\frac{k_1 b}{2\pi} = -\frac{C_1 f_0}{1 + i\pi f_0 - S'_1 f_0} - \frac{C_5 f_1}{1 + i\pi f_1/2 - S'_3 f_1} + \frac{2\pi}{k_1 b} \frac{(C_3^2 - C_1 C_5) f_0 f_1}{(1 + i\pi f_0 - S'_1 f_0)(1 + i\pi f_1/2 - S'_3 f_1)}. \quad (\text{B.12})$$