



# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ СИЛЬНОТОЧНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕОДНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ**

**Светлана Сытова**  
Институт ядерных проблем  
Белгосуниверситета

[sytova@inp.bsu.by](mailto:sytova@inp.bsu.by)

# Цель работы

Исследование методами математического моделирования нелинейной динамики процессов излучения сильнооточных пучков заряженных частиц при движении в различных неоднородных пространственно-периодических структурах на примере вакуумных электронных приборов – объемных лазеров на свободных электронах с целью создания инструмента для эффективного выбора оптимальных параметров и повышения эффективности применения экспериментальных установок усилителей и генераторов перестраиваемого когерентного излучения высокой мощности в диапазонах от миллиметрового до рентгеновского для различных применений в науке и коммерческих приложениях.

# Основные этапы работы

1. Разработка математических моделей процессов излучения ультрарелятивистских пучков заряженных частиц при прохождении различных неоднородных пространственно-периодических структур.
2. Разработка эффективных численных методов для решения нелинейных систем уравнений, описывающих разработанные математические модели.
3. Создание комплекса программ для моделирования нелинейной динамики процессов излучения ультрарелятивистских пучков заряженных частиц при прохождении различных неоднородных пространственно-периодических структур.
4. Исследование численно линейной и нелинейной стадии излучения различных типов ОЛСЭ.
5. Исследование ОЛСЭ как динамического хаотического объекта.

# Введение.

## Что такое вакуумные электронные приборы

### Limiting Stable Current in Electron Beams in the Presence of Ions\*

J. R. PIERCE

*Bell Telephone Laboratories, Inc., New York, New York*

(Received July 11, 1944)

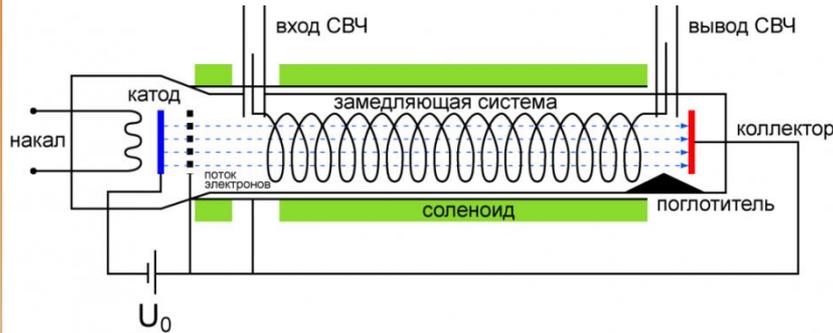
\**Journal of Applied Physics* 15, 721 (1944)

In electron flow, the net electronic charge may be neutralized by positive ions. In this case, for a given geometry there is a limiting current beyond which homogeneous flow is unstable. This limiting current is evaluated for flow normal to parallel plane equipotentials and for flow filling a conducting tube and constrained to motion parallel to the axis. For parallel planes at a potential  $V_0$  volts and spaced a distance  $L$  cm apart, the limiting current density in amperes/cm<sup>2</sup> is  $i_0 = 104 \times 10^{-4} V_0^{3/2} / L^2$ . For a long conducting tube the limiting current is  $I_0 = 160 \times 10^{-4} V_0^{3/2}$ . These limiting currents are roughly 6 times as great as in the absence of ions.

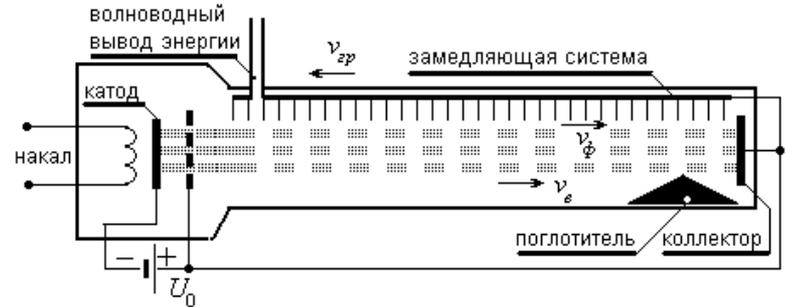
Начиная с сороковых годов двадцатого века исследования в области нелинейных процессов излучения заряженных частиц при их прохождении пространственно-периодических структур (резонаторов) и взаимодействии там с электромагнитным полем ведутся в различных типах электронных вакуумных приборов (усилителей и генераторов). Такие приборы функционируют в широком диапазоне спектра от микроволнового до рентгеновского. Их производительность и надежность в настоящее время обеспечивается использованием сложных электромагнитных структур на основе новых материалов и передовых технологий. Широкое применение таких приборов в военных и коммерческих приложениях требует их надежной работы при высокой мощности, высокой эффективности и низкой стоимости.

# Введение.

## Что такое вакуумные электронные приборы



R. Kompfner. The traveling wave tube.  
Wireless World LII. 1946. P. 369–372.



Patent FR1035379 (A) : B. Epsztein, "Backward flow travelling wave devices", 1959-03-31

Основа функционирования таких приборов заключается в излучении электронов, сгруппированных в сгустки и взаимодействующих в резонаторе (замедляющей системе) с медленными электромагнитными волнами.

Отличие лампы бегущей волны (ЛБВ) от лампы обратной волны (ЛОВ) состоит в том, что в первом случае электроны пучка взаимодействуют с «прямой» электромагнитной волной, распространяющейся в направлении движения электронов.

# Введение.

## Что такое вакуумные электронные приборы

### Важные научные приложения\*:

- ускорители частиц высоких энергий,
- нагрев плазмы для управляемого термоядерного синтеза,
- в медицинских системах в качестве компактных ускорителей ядерного магнитного резонанса

\*J. Benford, J.A.SweGLE, E. Schamiloglu. High Power Microwave. CRC Press, 2016.

T.C. Marshall, Free Electron Laser. McMillan, New York, 1985.

H. P. Freund, T. M. Antonsen, Jr. Principles of Free Electron Lasers. Springer, 2018.

V.G. Baryshevsky. High-energy nuclear optics of polarized particles. World Scientific Publishing Company, 2012.

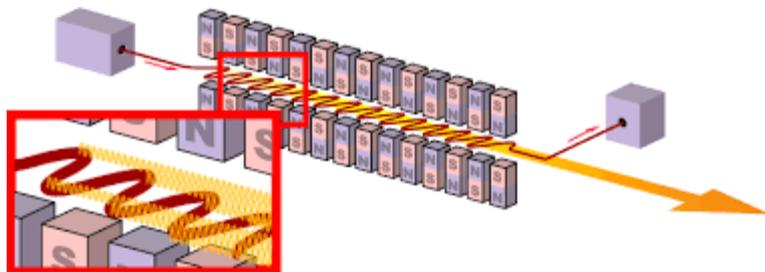
V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk, A. P. Ulyanenko. Parametric X-ray Radiation in Crystals. Theory, Experiments and Applications. Springer, 2005.

L.A. Weinstein, V.A. Solntsev. Lectures on microwave electronics. Sov. Radio, 1973 (In Russian).

D.I. Trubetskov, A.E. Hramov. Lectures on microwave electronics for physicists: in 2 vol. FIZMATLIT, 2003, 2004 (In Russian).

# Введение.

## Что такое лазеры на свободных электронах (ЛСЭ)



Основной принцип работы заключается в излучении электронов, движущихся, колеблющихся и излучающих под действием внешнего электромагнитного поля\*.

Первые экспериментальные исследования ЛСЭ\*\*\* подтвердили эффективность использования релятивистского электронного пучка в качестве активной среды в отличие от обычных лазеров со связанными атомными или молекулярными состояниями. ЛСЭ может генерировать перестраиваемое когерентное излучение высокой мощности в диапазонах от рентгеновского до миллиметрового

\* Madey J. M. J. Stimulated Emission of Bremsstrahlung in a Periodic Magnetic Field. J/ Appl. Physics. 1971. Vol. 42. P. 1906–1913. Colson W.B. Theory of a Free Electron Laser. Physics Letters. 1976. Vol. 59A. P. 187–190.

\*\* Deacon D. A. et al. First operation of a Free-Electron Laser. Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38. P. 892–894.

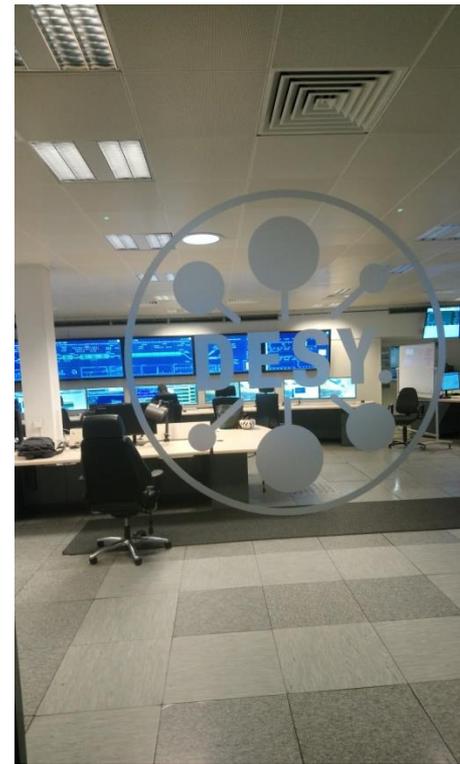
# Введение. European XFEL (DESY)



Booster



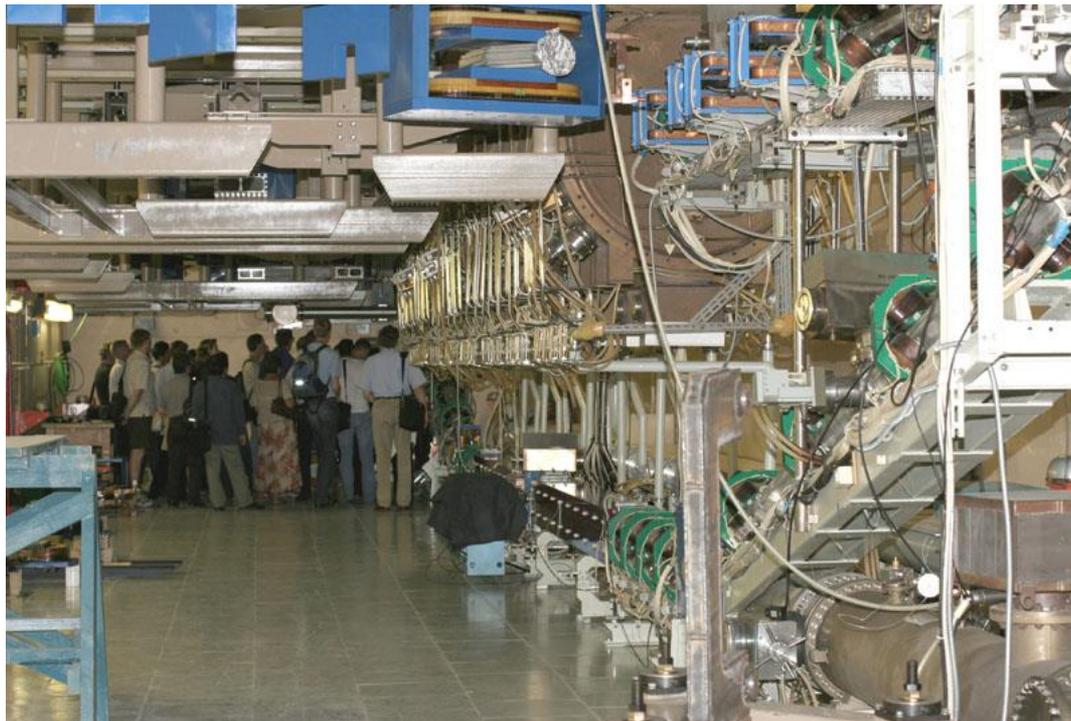
Linear accelerator+XFEL



Control room

Длина 3,4 км, генерирует чрезвычайно интенсивные рентгеновские импульсы для определения атомной структуры вирусов, исследования химических реакций, изучения процессов внутри планет.

# Введение. Новосибирский ЛСЭ\*

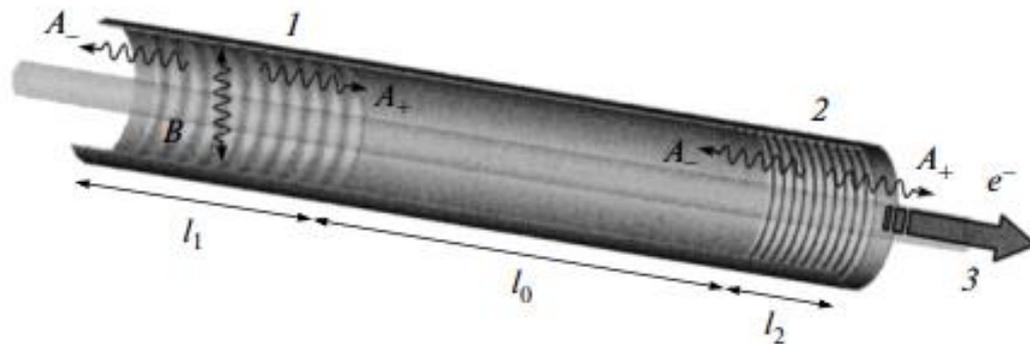


\*Kulipanov et al.  
Novosibirsk Free  
Electron Laser  
Facility Description  
and Recent  
Experiments IEEE  
Trans. on Therahertz  
Science and  
Technology. 2015.  
Vol. 5, No. 5. P.  
798–809.

Находится в эксплуатации с 2003 года. Он обеспечивает узкополосное (менее 1%) ТГц излучение в диапазоне длин волн 80 - 240 мкм при средней мощности до 0,5 кВт и пиковой мощности до 1 МВт. За последние годы на объекте было выполнено около 30 пользовательских исследовательских проектов в различных областях науки.

## Введение.

## Мазеры на свободных электронах (МСЭ)\*



**Fig. 1.** Schematic diagram of a FEM with a combined double-mirror resonator: (1) modified Bragg reflector (2) traditional 1D Bragg reflector; (3) electron beam. Wavy lines show the directions of propagation of the electromagnetic flows  $A_{\pm}$  and  $B$ . The corrugation period of the modified Bragg structure (1) is about twice that of the traditional structure (2).

**Maser is a microwave amplification by stimulated emission of radiation.**

\*И. Е. Ботвиник и др. Мазер на свободных электронах. Письма ЖЭТФ. **35**, 418 (1982)  
N. S. Ginzburg et al. Free Electron Maser with High Selectivity Bragg Resonator Using Coupled Propagating and Trapped Modes. Technical Physics Letters, 2010, Vol. 36. P. 952–956

# Введение. Основные уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta_\alpha}{\partial \zeta^2} = - \left( 1 + v \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \zeta} \right)^{3/2} \operatorname{Re} ( F e^{i \theta_\alpha} );$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i \theta_\alpha} d \alpha;$$

$$\theta |_{\zeta=0} = \alpha, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad F |_{\zeta=l} = 0, \quad F |_{\zeta=0} = F^0(\zeta)$$

$$\frac{\partial \hat{A}_+}{\partial Z} + \frac{\partial \hat{A}_+}{\partial \tau} + i \alpha_1 \hat{B} = J, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i \theta} d \theta_0, \quad (2a)$$

Гинзбург Н.С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ. Известия вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, №7. С. 1037–1052.

$$-\frac{\partial \hat{A}_-}{\partial Z} + \frac{\partial \hat{A}_-}{\partial \tau} + i \alpha_1 \hat{B} = 0, \quad \frac{iC}{2} \frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial Z^2} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \tau} + \sigma \hat{B} + i \alpha_1 (\hat{A}_+ + \hat{A}_-) = 0. \quad (2б,в)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial Z} + \beta_{\parallel}^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \theta = \operatorname{Re}(\hat{A}_+ e^{i \theta}), \quad \theta |_{Z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi],$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial Z} + \beta_{\parallel}^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \theta \Big|_{Z=0} = \Delta.$$

Гинзбург Н.С. и др. Мазер на свободных электронах с высокоселективным брэгговским резонатором, основанным на связи бегущих и квазикритических волн. Письма ЖТФ. 2010. Т. 36. С. 952–956

# Введение. Динамические системы\*



Хаотическая динамика означает тенденцию широкого круга систем переходить в состояния с детерминированным поведением и непредсказуемым поведением.

Нелинейность - необходимое, но недостаточное условие хаоса в системе. Основная причина хаоса - экспоненциальное расхождение изначально близких траекторий в нелинейных системах. Это так называемый «эффект бабочки» \*\* (чувствительность к начальным условиям).

Хаос в электронных устройствах, таких как ЛОВ, ЛБВ, ЛСЭ и т. д. происходит из-за запаздывающего характера распределенной обратной связи.

\*Н.-G. Schuster, "Deterministic Chaos" An Introduction, Physik Verlag, (1984)

\*\* E.N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20 (1963), 130

Hur M. S. et al. Phys. Rev. E58 (1998), 936-941

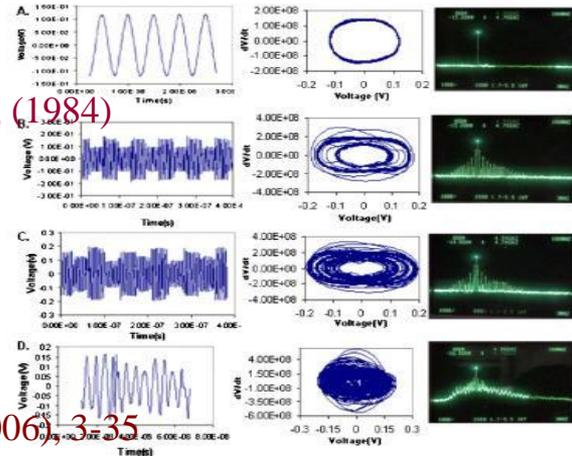
Ninno G., Fanelli. D. Phys. Rev. Let. 92 (2004), 094801

Bruni C. et al. Nucl. Instr. Meth. A528 (2004), 273-277

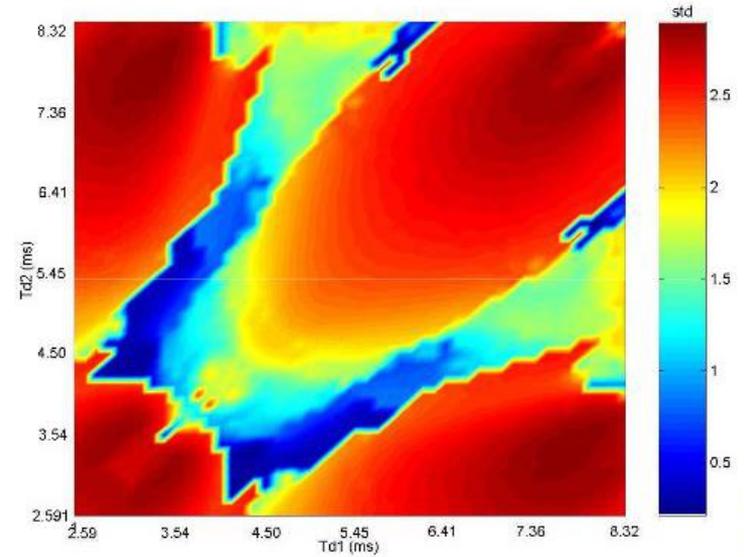
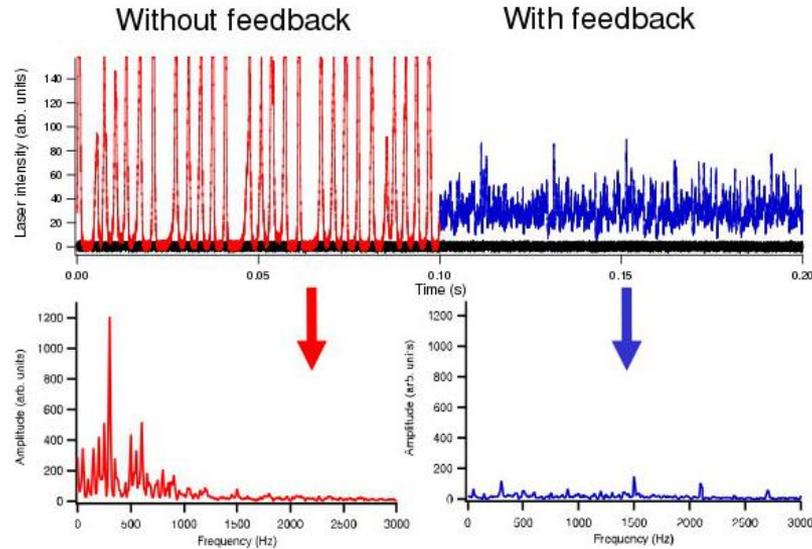
Thomas C.A. et al. Eur. Phys. J. D32 (2005), 83-93

Marchewka C. et al. Phys. Plasma (2006),13, 013104

Kuznetsov S.P. Izvestija VUZov - Applied Nonlinear Dynamics, 14 (2006), 3-35

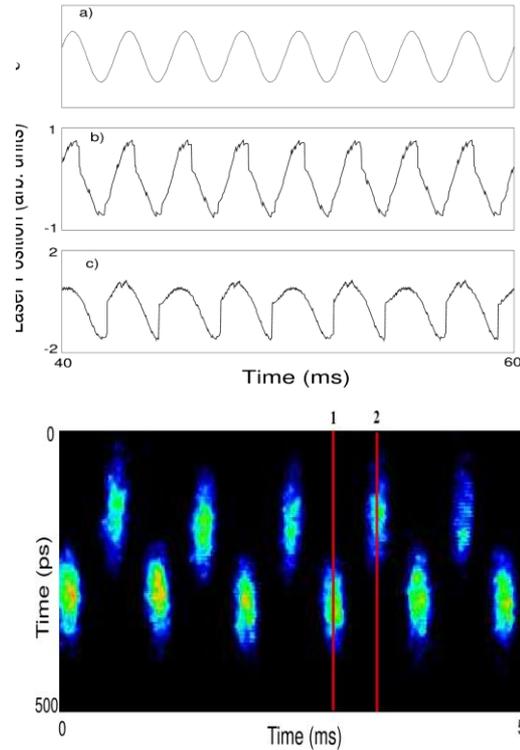
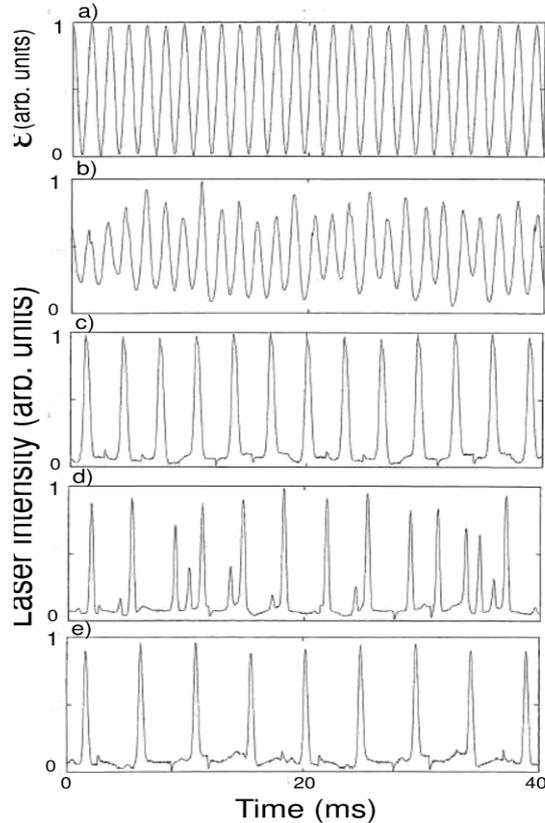


# Введение. Хаос в ЛСЭ



M. Billardon. Storage ring free-electron laser and chaos. Phys. Rev. Lett. 65 (1990), 713  
S.J. Hahn, J.K. Lee. Bifurcations in a short-pulse free-electron laser oscillator. Phys. Lett. A 175 (1993), 339-343

# Введение. Хаос в ЛСЭ (Super-ACO FEL)



De Ninno, G., Fanelli, D., Bruni, C. et al.. Eur. Phys. J. D (2003) 22: 269.  
C. Bruni et al. Eur. Phys. J. D 55, 669-677 (2009)

# Введение. Новый закон неустойчивости\* электронного пучка, движущегося в пространственно-периодической среде

Инкремент неустойчивости в точках вырождения корней дисперсионного уравнения:

$$G \sim \sqrt[3+s]{\rho}$$

вместо  $\sim \sqrt[3]{\rho}$  для других систем (ЛОВ, ЛБВ, ЛСЭ и др.)

Пороговый ток в точках вырождения корней дисперсионного уравнения:

$$j_{start} \sim \frac{1}{(kL)^{3+2s}}$$

вместо  $\sim (kL)^{-3}$  для других систем.

$s$  – число дополнительных волн, возникающих в системе вследствие дифракции.

\*V.G.Baryshevsky, I.D.Feranchuk, Phys.Let. 102A (1984) 141,  
В.Г.Барышевский, ДАН СССР, 299(1988), 1363

## **Введение. Объемный лазер на свободных электронах (ОЛСЭ)\* –**

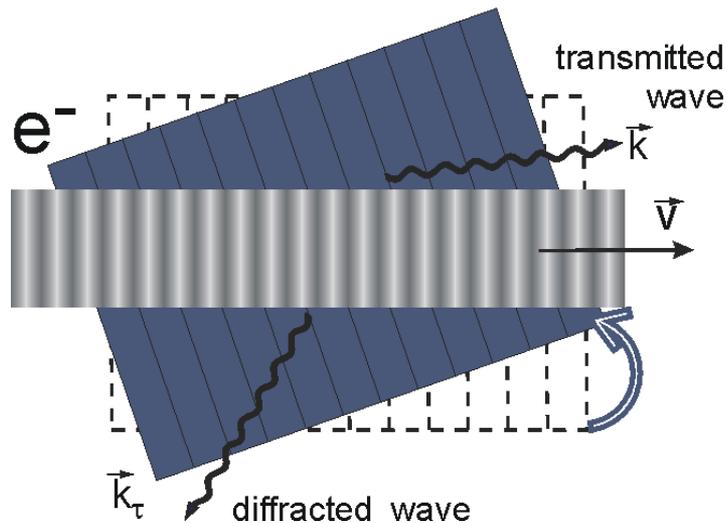
электронный прибор, работающий на излучении релятивистских электронов, движущихся в двумерных (трехмерных) пространственно-периодических средах (резонаторах, естественных или искусственных электромагнитных (фотонных) кристаллах) в синхронизме с одной или несколькими электромагнитными волнами, для которых выполняются условия дифракции Брэгга в резонаторе вблизи области вырождения корней дисперсионного уравнения.

\*V.G.Baryshevsky, I.D.Feranchuk, Phys.Lett. 102A (1984) 141,

В.Г.Барышевский, ДАН СССР, 299(1988), 1363

# Введение. Основная особенность ОЛСЭ –

объемная (неодномерная) многоволновая  
распределенная обратная связь в условиях  
дифракции.



**Основные принципы  
ОЛСЭ, справедливые  
для всех частотных  
диапазонов:**

*Условия дифракции*

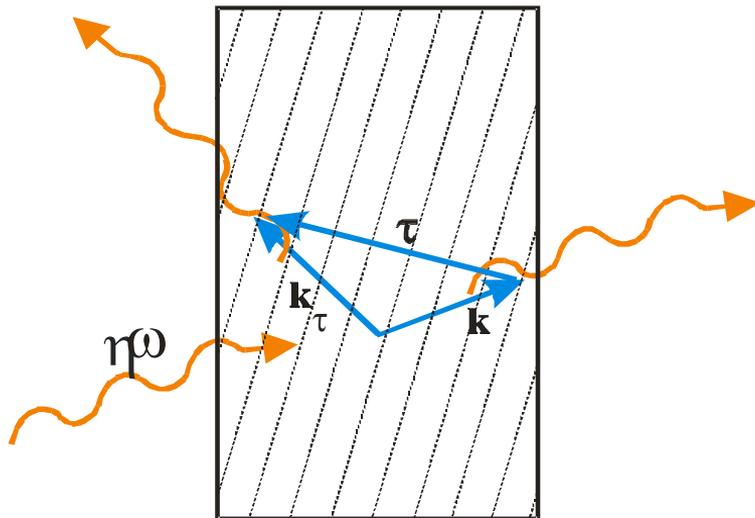
$$2k\tau + \tau^2 \approx 0$$

*Условия синхронизма*

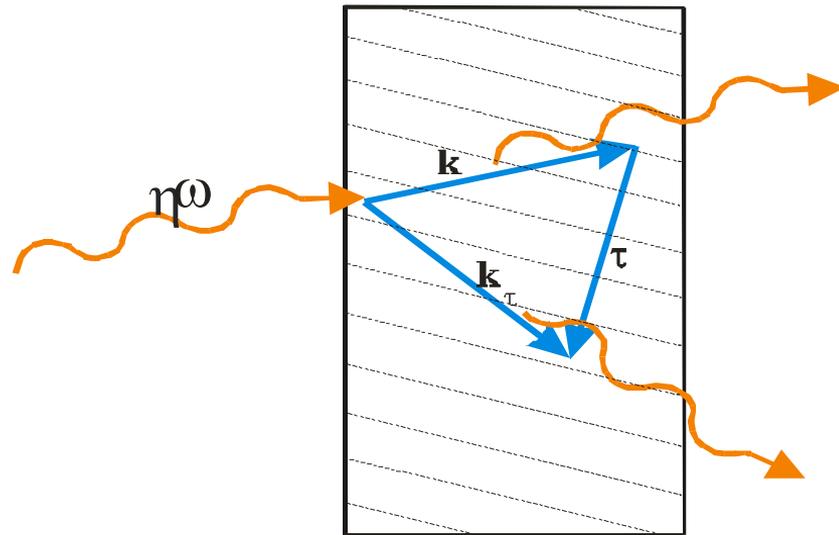
$$|\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}| = \delta\omega$$

# Введение. Различные геометрии динамической дифракции\*

## Геометрия Брэгга



## Геометрия Лауэ

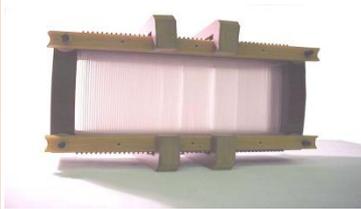


$\tau$  – вектор обратной решетки.

Принципы динамической дифракции справедливы в диапазонах от рентгеновского до терагерцового.

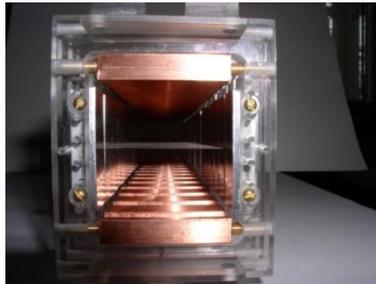
\*Bragg, W.H.; Bragg, W.L. (1913). *Proc R. Soc. Lond. A.* **88** (605): 428–38.

# Введение. История экспериментов ОЛСЭ



**1996** Экспериментальное моделирование электродинамических процессов в объемной дифракционной решетке из диэлектрических нитей

V.G.Baryshevsky et al., NIM 393A (1997) 71



**2001** Генерация ОЛСЭ в мм-диапазоне

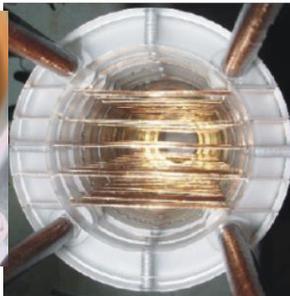
V.G.Baryshevsky et al., NIM 483 A (2002) 21

**2004** ОЛСЭ с сеточными резонаторами

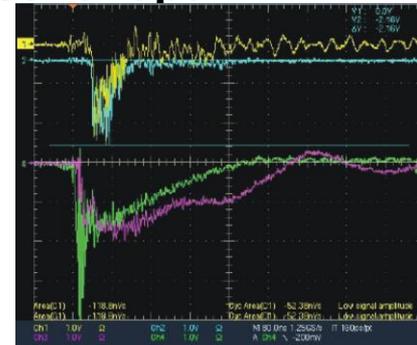
V.G. Baryshevsky et al., NIM. B 252 (2006) 86



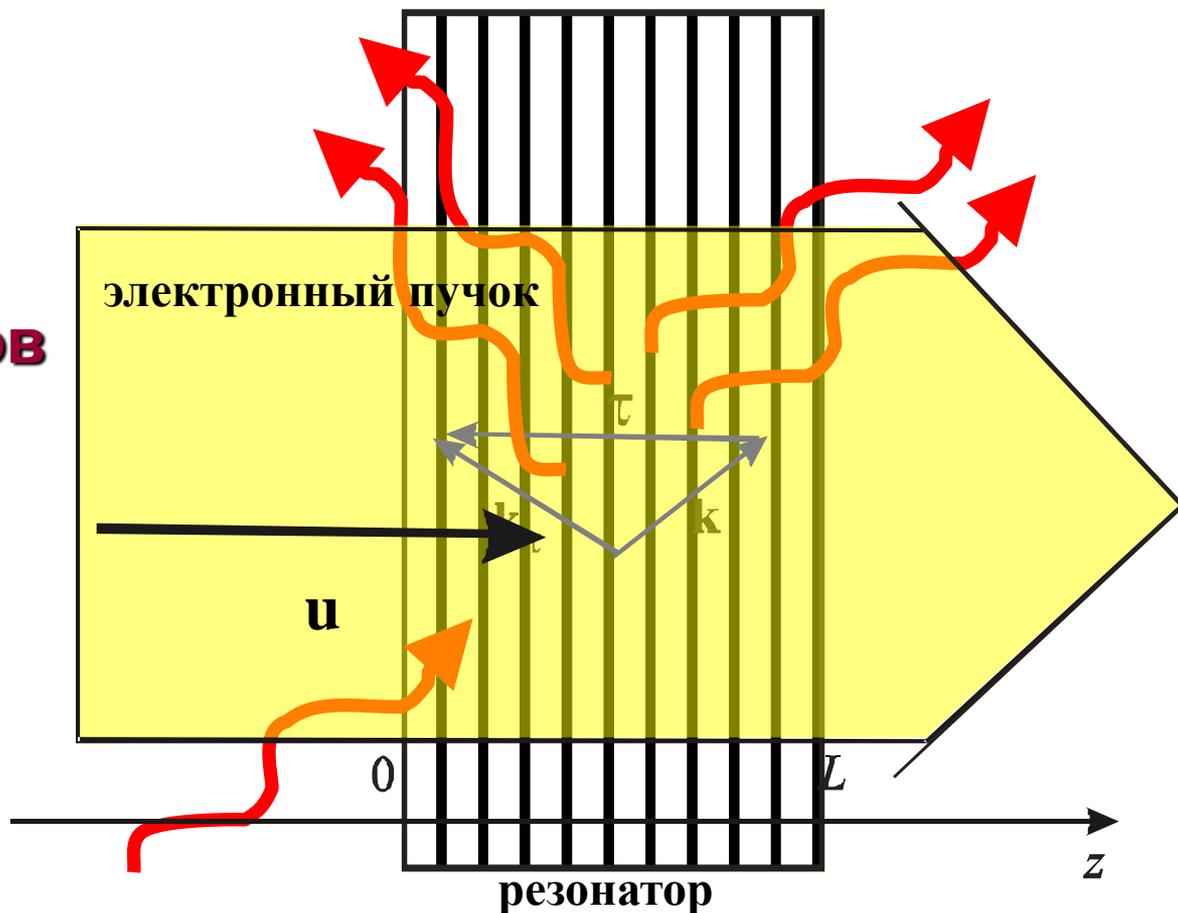
**2009** ОЛСЭ с сеточными и фольговыми резонаторами



V. G. Baryshevsky et al. Proc. IRMMW-THz 2010; Proc. FEL2010. Nuovo Cimento 34 (2011), 199, Nonl. Phen. Complex Syst., vol. 16, no. 3 (2013), 209 - 216



**1. Разработка математических моделей процессов излучения сильнооточных пучков заряженных частиц при прохождении различных неоднородных пространственно-периодических структур**



# Исходные уравнения

**Уравнения Максвелла:** 
$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{j}_b}{\partial t},$$

**n-волновое приближение:** 
$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^n \mathbf{e} E_j e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{j}_b = \sum_{l=1}^m \mathbf{e} j_l e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega t)}$$

## Вектор электрической индукции:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau, \omega) \exp(-i \tau \mathbf{r}),$$

$$\varepsilon(0, \omega) = 1 + \chi_0, \quad \varepsilon(\tau, \omega) = \chi_{\tau}, \quad \varepsilon(-\tau, \omega) = \chi_{-\tau}$$

**Уравнение движения:** 
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\}, \quad \mathbf{p} = m \gamma \mathbf{v},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{m \gamma^3} (\mathbf{e} \mathbf{n}) \operatorname{Re} \left[ E e^{i\theta(t, t_0, \mathbf{r}_{\perp})} \right] \quad \theta(t, t_0, \mathbf{r}_{\perp}) = k_z z + \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp} - \omega t(z, t_0)$$

# Двухволновой ОЛСЭ\*

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \gamma_0 c \frac{\partial E}{\partial z} + 0.5i\omega l E - 0.5i\omega \chi_\tau E_\tau = 2\pi j\Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} \left( e^{-i\theta(t,z,p)} + e^{-i\theta(t,z,-p)} \right) dp,$$

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial t} + \gamma_1 c \frac{\partial E_\tau}{\partial z} - 0.5i\omega \chi_{-\tau} E + 0.5i\omega l_1 E_\tau = 0$$

$$\Phi = \sqrt{l_0 + \chi_0 - 1/(u/c\gamma)^2},$$

$$l_0 = \frac{\mathbf{k}^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_0}{\omega^2},$$

$$l_1 = \frac{\mathbf{k}_\tau^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_0}{\omega^2},$$

$$l = l_0 + \delta,$$

$\gamma_{0,1}$  – направляющие косинусы.

$\tau$  – вектор обратной решетки,  $\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k} + \tau$

\*К.Г.Батраков, С.Н.Сытова. ЖВМ МФ, 2005. Т. 45, № 4, с. 690-700

## Уравнения для широкого в поперечном сечении электронного пучка

$$\frac{\partial^2 \theta(t, z, p)}{\partial z^2} = \frac{e\Phi}{m\gamma^3 \omega^2} \left( k - \frac{\partial \theta(t, z, p)}{\partial z} \right)^3 \operatorname{Re}(E(t - z/u, z)) \times \\ \times \exp(i\theta(t, z, p)),$$

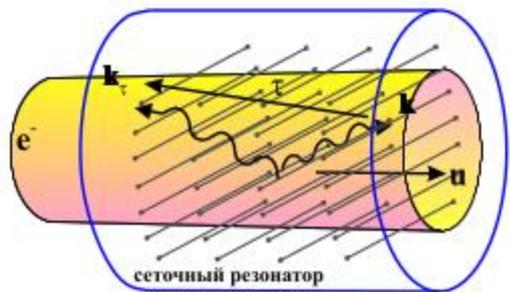
$$\frac{\partial \theta(t, 0, p)}{\partial z} = k - \omega/u, \quad \theta(t, 0, p) = p,$$

$$t > 0, \quad z \in [0, L], \quad p \in [-2\pi, 2\pi]$$

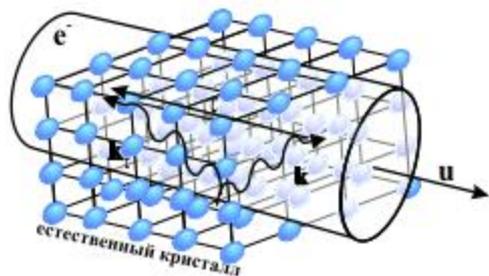
$\theta(t, z, p)$  – фаза электронов пучка по отношению к электромагнитной волне

**Использован метод усреднения по фазам влета релятивистских электронов в область взаимодействия (по моменту и по поперечной координате влета электронов в область взаимодействия).**

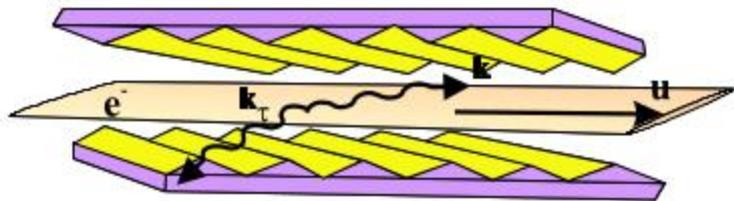
# Различные модели ОЛСЭ



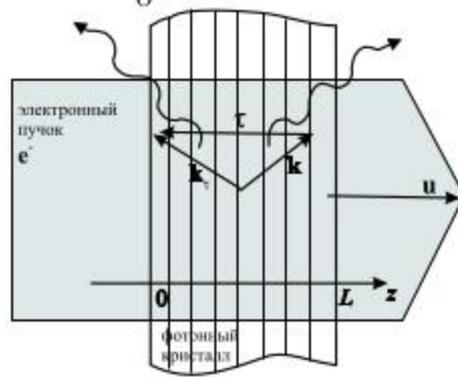
а



б

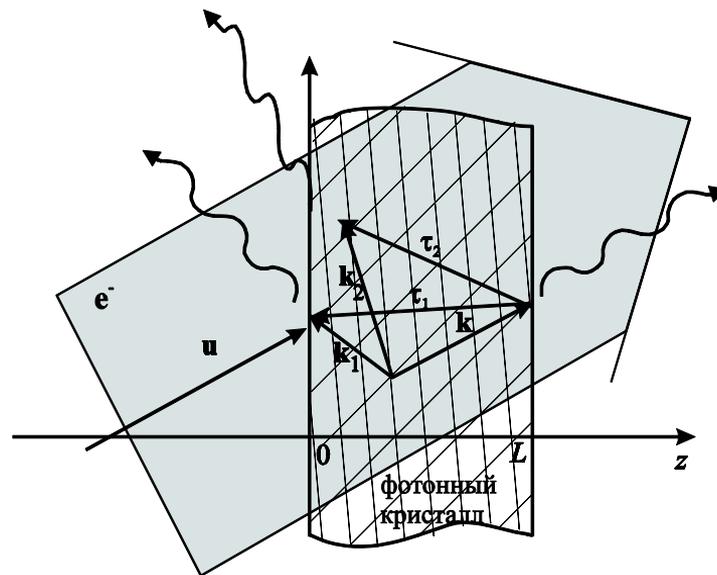
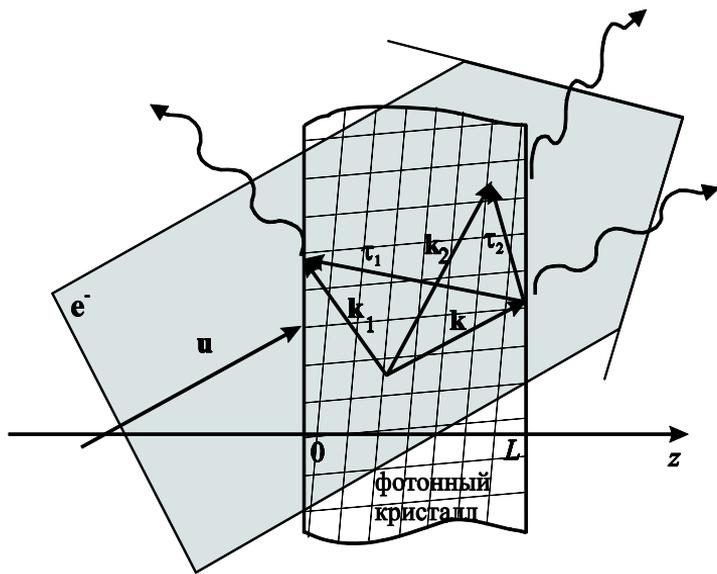


в

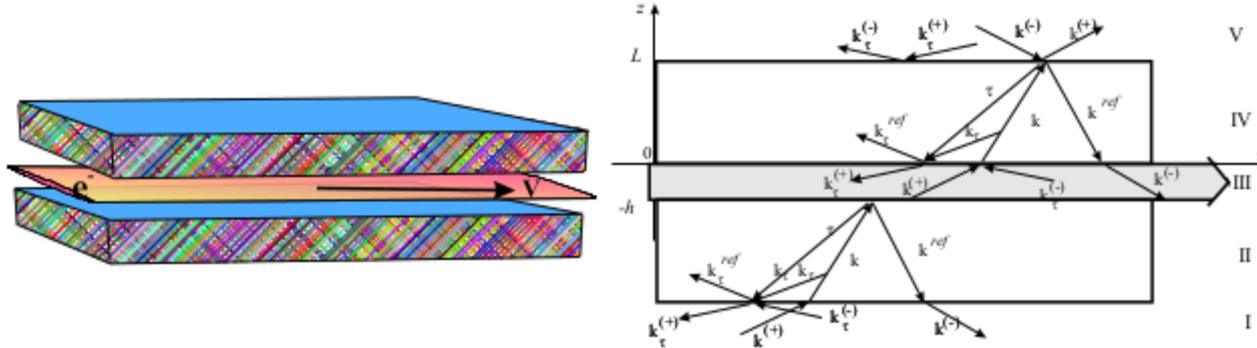


г

# Различные модели ОЛСЭ



# Различные модели ОЛСЭ



$$\frac{\partial E^{(\pm)}}{\partial t} \pm \frac{k_z c^2}{\omega} \frac{\partial E^{(\pm)}}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega} \frac{\partial E^{(\pm)}}{\partial x} = -\frac{2\pi i}{\omega} \frac{\partial j^{(\pm)}}{\partial t} - 2\pi j^{(\pm)}. \quad (\text{III})$$

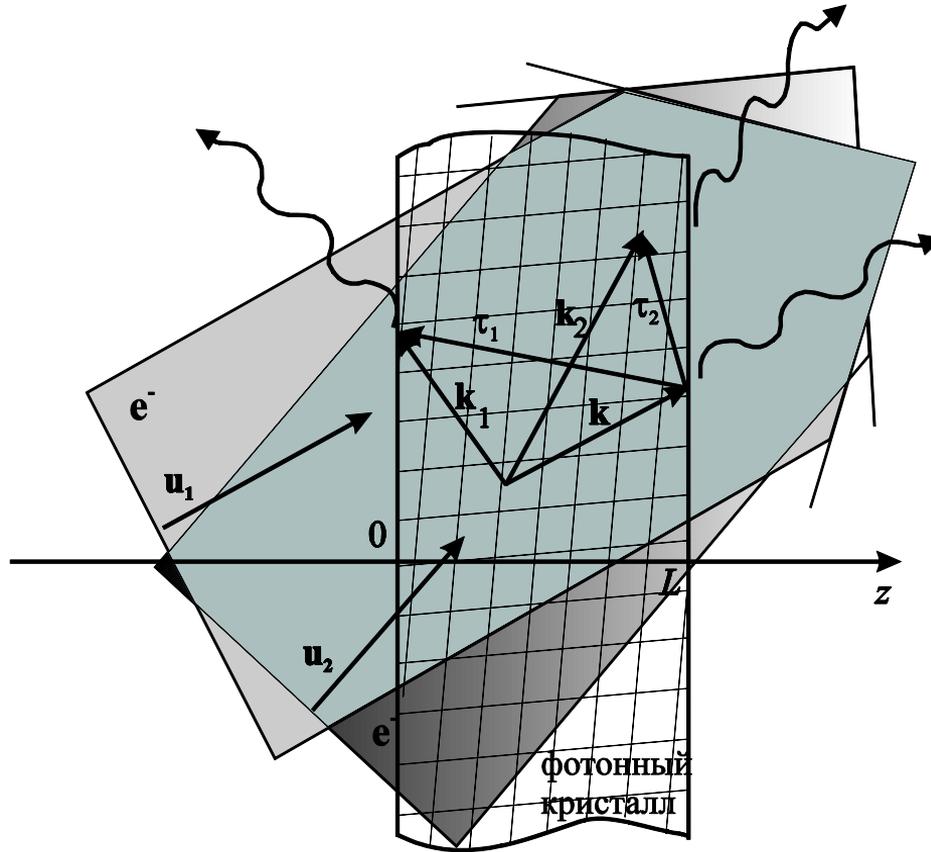
$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{k_z c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{i(\mathbf{k}^2 - \omega^2/c^2 \varepsilon_0)}{2\omega \varepsilon_0} E + \frac{i\omega \chi_\tau}{2\varepsilon_0} E_\tau = 0,$$

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial t} + \frac{k_{\tau z} c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E_\tau}{\partial z} + \frac{k_{\tau x} c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E_\tau}{\partial x} + \frac{i\omega \chi_\tau}{2\varepsilon_0} E + \frac{i(\mathbf{k}_\tau^2 - \omega^2/c^2 \varepsilon_0)}{2\omega \varepsilon_0} E_\tau = 0. \quad (\text{II}), (\text{IV})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{k_z c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

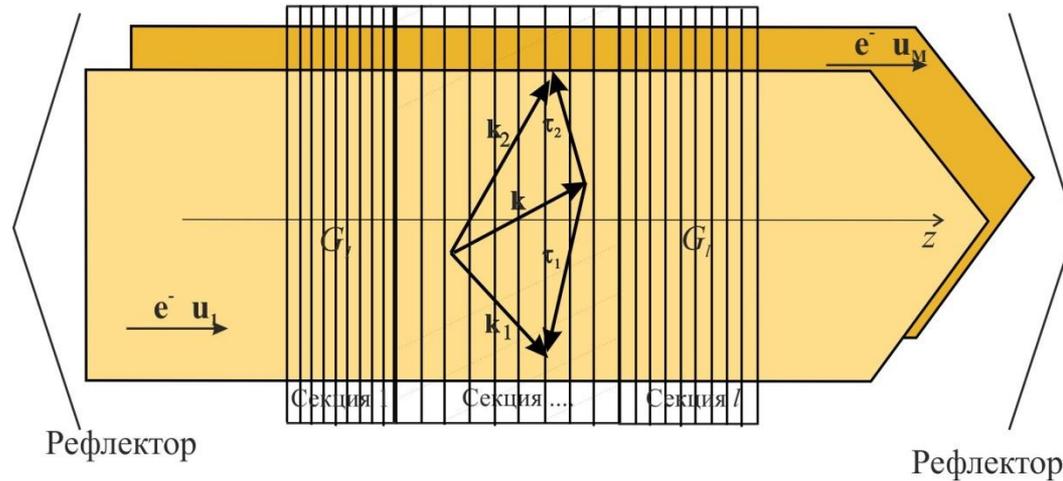
$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \mathbf{D} \mathbf{E} = \mathbf{F}(\mathbf{E}^{(0)}, j^{(\pm)})$$

# Различные модели ОЛСЭ



# Обобщенные модели ОЛСЭ

Предложены обобщенные системы уравнений, описывающие различные варианты многопучковых многоволновых ОЛСЭ, учитывающие многосекционные резонаторы, дисперсию электромагнитных волн в системе, наружные зеркала и т.д.



# Обобщенные модели ОЛСЭ

Пусть в системе в условиях динамической дифракции образуются  $N$  электромагнитных волн  $E_i(z, t)$  по  $n_i$  волн в каждой  $i$ -той секции.  $\sum_{i=1} n_i = N$

Пусть на систему падает  $M = M^{left} + M^{right}$  пучков электронов:  $M^{left}$  пучков, пришедших с границы  $z = 0$ , и  $M^{right}$  пучков, пришедших с границы  $z = L$ . Каждый пучок с начальной скоростью  $u_m$  описывается фазой  $\theta_m(t, z, p)$  электронов. В каждой секции резонатора он может находиться в синхронизме с одной волной  $E_\alpha$  с волновым вектором  $\mathbf{k}_\alpha$ .

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mathbf{C} \mathbf{E} = \mathbf{F} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & L & a_{1N} \\ a_{21} & 1 + a_{22} & L & a_{2N} \\ M & M & O & M \\ a_{N1} & a_{N2} & L & 1 + a_{NN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & L & 0 \\ M & O & M \\ 0 & L & b_{NN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & L & c_{1N} \\ M & O & M \\ c_{N1} & L & c_{NN} \end{pmatrix},$$

$$F_m = \Phi_m \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{4\pi} \left( e^{-i\theta_m(t, z, p)} + e^{-i\theta_m(t, z, -p)} \right) dp, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$\frac{\partial^2 \theta_m(t, z, p)}{\partial z^2} = \Psi_m \left( k_{\alpha z} - \frac{\partial \theta_m(t, z, p)}{\partial z} \right)^3 \operatorname{Re} \left( E_\alpha(t - z / u_m, z) e^{i\theta_m(t, z, p)} \right)$$

$$\mathbf{E}(t, \Gamma_1) = \mathbf{E}^0(t) + \mathbf{Q} \mathbf{E}(t, \Gamma_2) \quad \frac{\partial \theta_m(t, \Gamma_1^m, p)}{\partial z} = k_{mz}^0 - \omega / u_m, \quad \theta_m(t, \Gamma_1^m, p) = p.$$

## 2. Разработка эффективных численных методов для решения нелинейных систем уравнений, описывающих разработанные математические модели

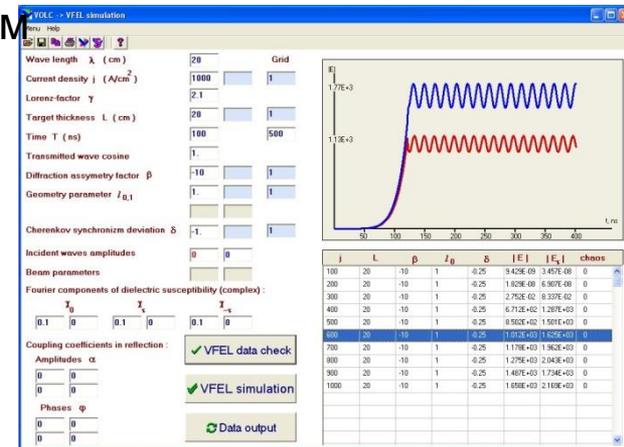
$$E_t + a_1 \hat{E}_{\bar{z}} + b_{11} \hat{E} + b_{12} \hat{E}_\tau = \Phi \sum_{j=0}^N c_j \left( \exp(-i\hat{\theta}^j) + \exp(-i\hat{\theta}^{-j}) \right),$$

$$E_{\tau t} + a_2 \hat{E}_{\tau z} + b_{21} \hat{E} + b_{22} \hat{E}_\tau = 0,$$

$$\mathcal{D}_{\bar{z}z}^j = \Psi \left( k - \mathcal{D}_z^j \right)^3 \operatorname{Re} \left( \hat{E} \exp(i\theta^j) \right), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N_p$$

### 3. Создание комплекса программ для моделирования нелинейной динамики процессов излучения сильнофокусированных пучков заряженных частиц при прохождении различных неоднородных пространственно-периодических структур

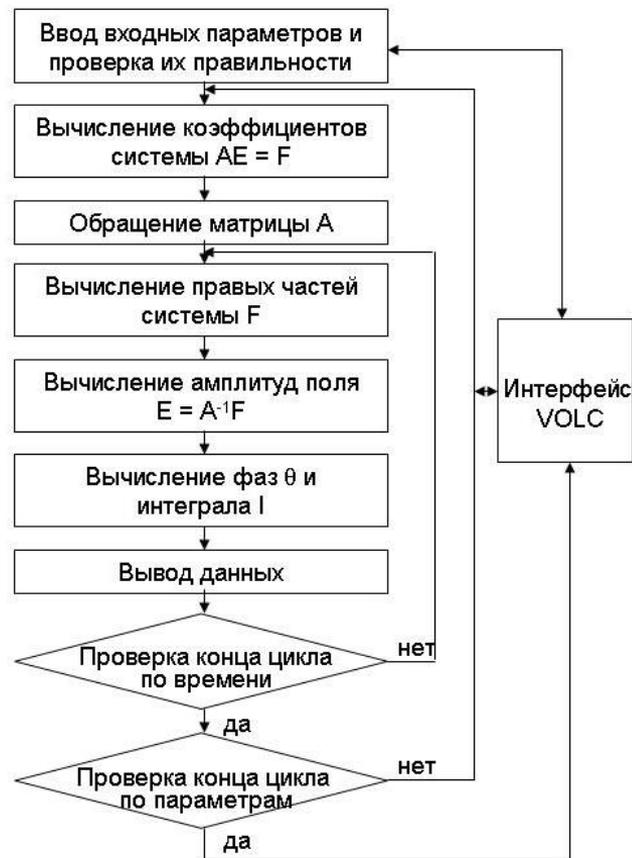
Для моделирования различных вариантов ОЛСЭ в 1999–2019 гг. был разработан комплекс программ VOLC (“**VOL**ume **C**ode”) – нестационарная программа, позволяющая осуществить моделирование рассматриваемых физических процессов в одном (1D) и двух (2D) пространственных измерениях.



# Комплекс программ VOLC

Состоит из 3 частей:

- подмодуль 1D (двух- и трехволновые геометрии, 1 пучок заряженных частиц),
- подмодуль 1D (двухволновые геометрии, 2 пучка заряженных частиц),
- подмодуль 2D (поверхностный ОЛСЭ с объемными решетками) .



# Комплекс программ VOLC

## позволяет моделировать:

- динамическую дифракцию электромагнитных волн в геометрии Брэгга и Лауэ в различных типах резонаторов, включая естественные кристаллы (рентгеновский диапазон), сеточные и фольговые резонаторы (СВЧ-диапазон) для двух- и трех-волнового случая дифракции, различных дифракционных структур (с учетом отраженных волн в оптическом диапазоне длин волн);
- режимы усиления и генерации, включая режим SASE;
- эффекты, обусловленные наличием внешних зеркал;
- эффекты дисперсии электромагнитных волн в системе;

## позволяет осуществлять:

- проверку условий дифракции в системе;
- вычисление значений коэффициентов разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки  $\chi_0, \chi_{\pm t}$ ;
- учитывать форму электромагнитных волн и пучка электронов, падающих на систему.

# Комплекс программ VOLC

## позволяет моделировать:

- динамику пучка электронов при прохождении резонатора при моделировании фаз электронов и функций распределения;
- взаимодействие одного и двух пучков электронов с электромагнитными волнами в условиях дифракции;
- прохождение пучка электронов над поверхностью объемного резонатора в условиях динамической дифракции;
- циклы по нескольким входным параметрам (параметры внешнего импульса электромагнитного излучения, длина резонатора, плотность тока пучка электронов, форма его импульса, геометрические параметры дифракции, отстройка от точного выполнения черенковского условия, параметры фотонного кристалла и др.) для формирования параметрических карт перехода к хаосу в системе.

# Комплекс программ VOLC

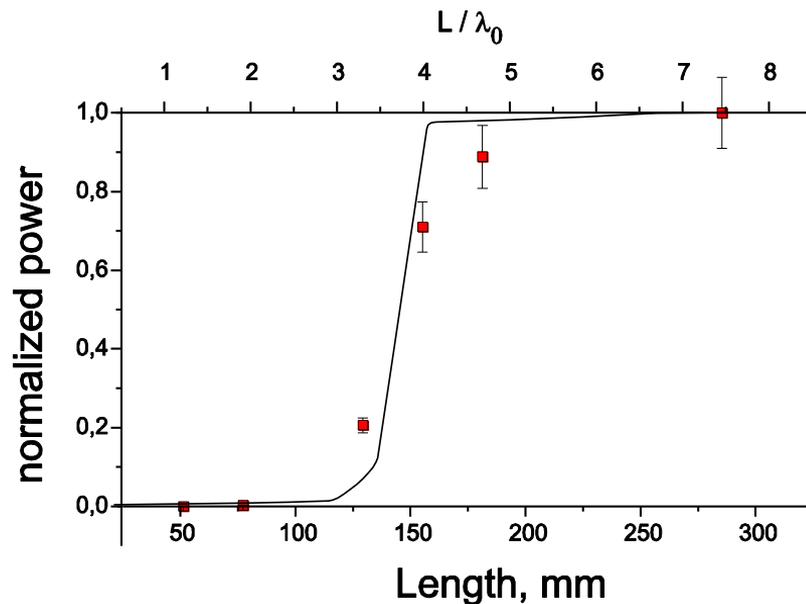
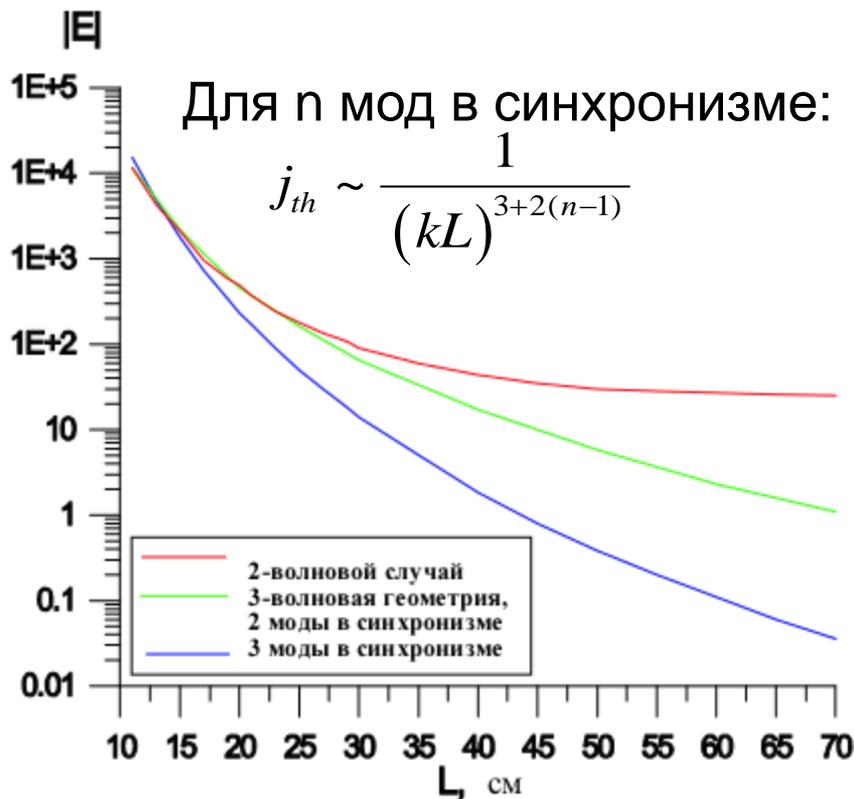
С целью всестороннего тестирования, валидации и верификации комплекса программ VOLC проведено сравнение численных результатов с аналитическими в случае:

- стационарного решения стандартной задачи дифракции в резонаторе;
- стационарного решения стандартной задачи дифракции с электронным пучком.

Первое позволило протестировать и верифицировать моделирование электромагнитных полей в системе, второе – моделирование движения электронов в системе.

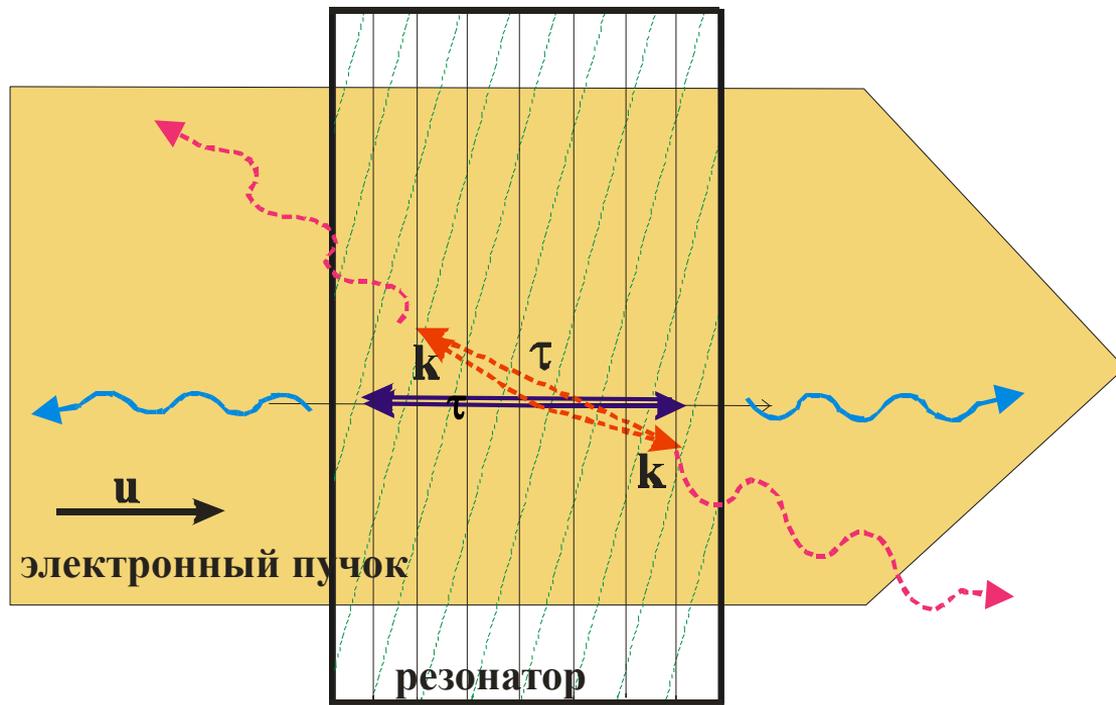
Также была проведена проверка выполнения основных законов функционирования ОЛСЭ в широком диапазоне параметров, исследована чувствительность решения к изменению начальных условий в системе и проведено моделирование экспериментальной установки ОЛСЭ.

# 4. Исследование численно линейной и нелинейной стадии излучения различных типов ОЛСЭ

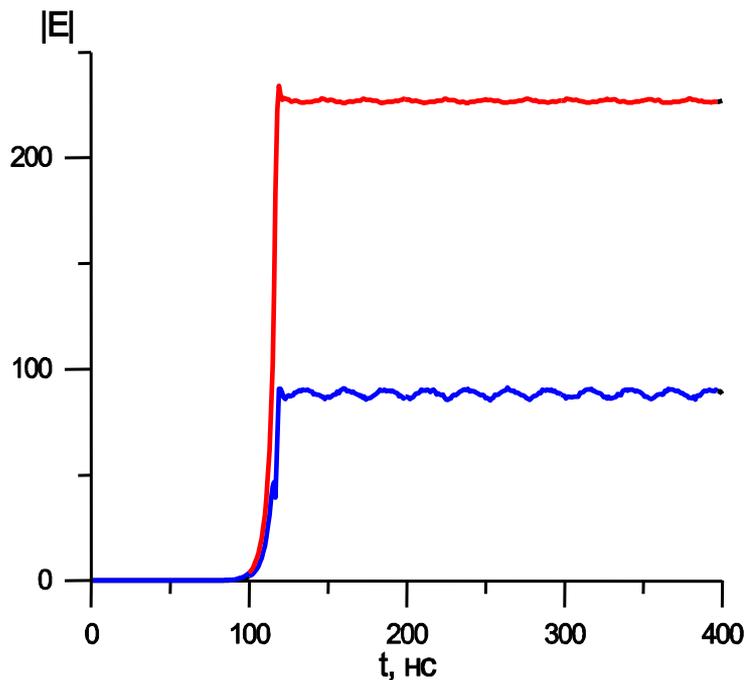


Baryshevsky V.G. et al., Proc. FEL06, p.331

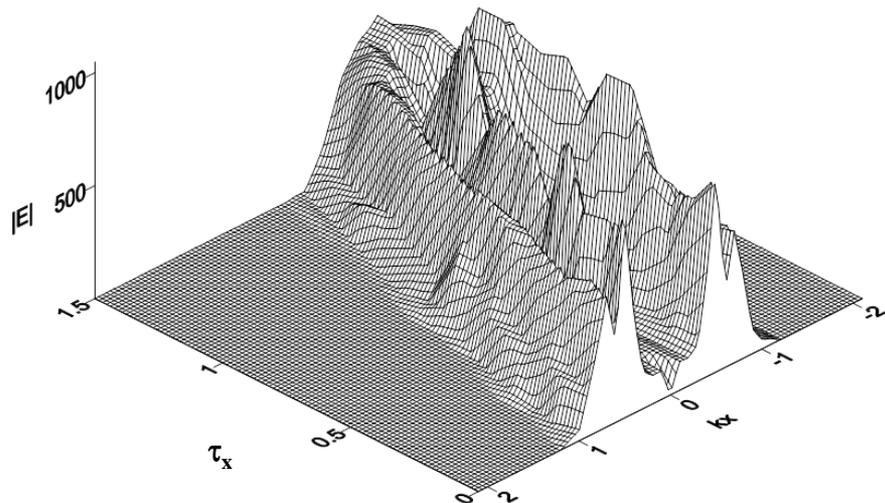
# Сравнение одномерной и двумерной РОС



# Сравнение одномерной и двумерной РОС

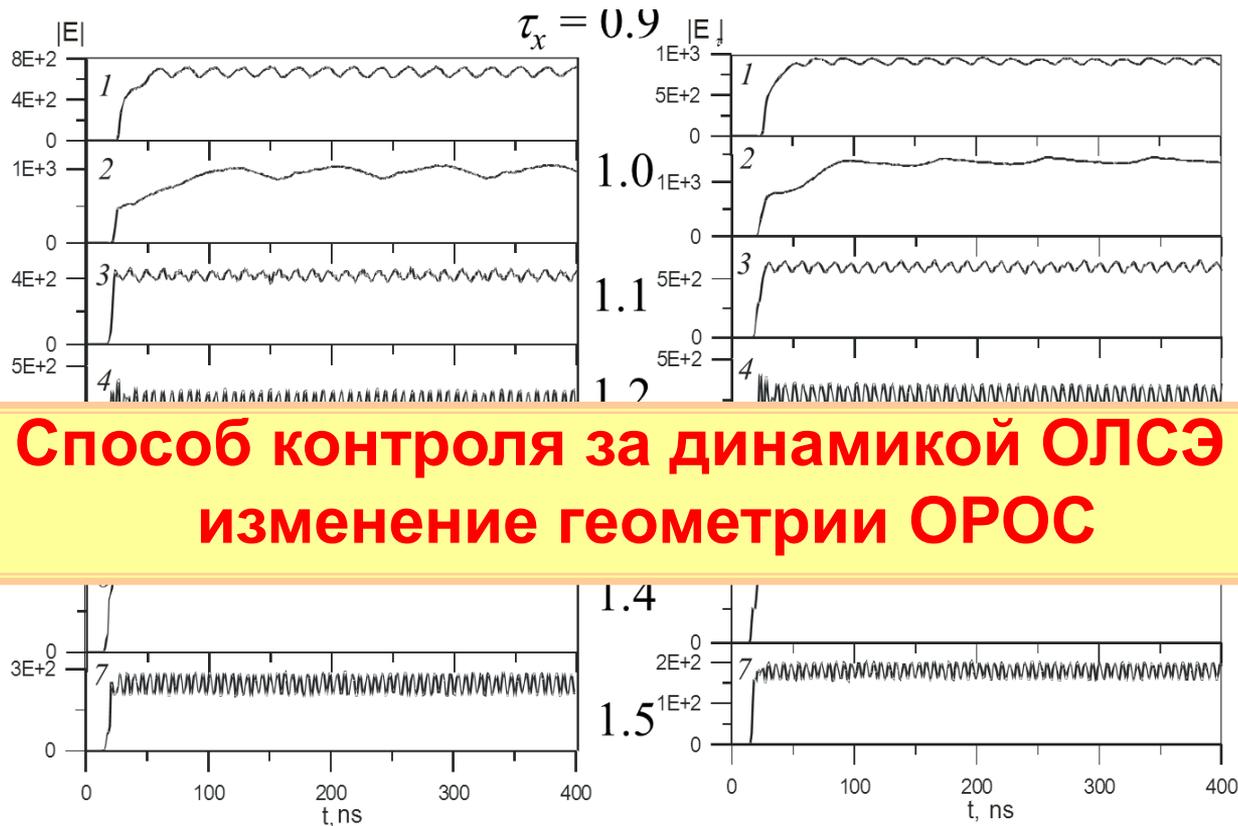


Временная зависимость амплитуд проходящей волны (синяя кривая) и дифрагированной волны (красная кривая) в одномерной геометрии

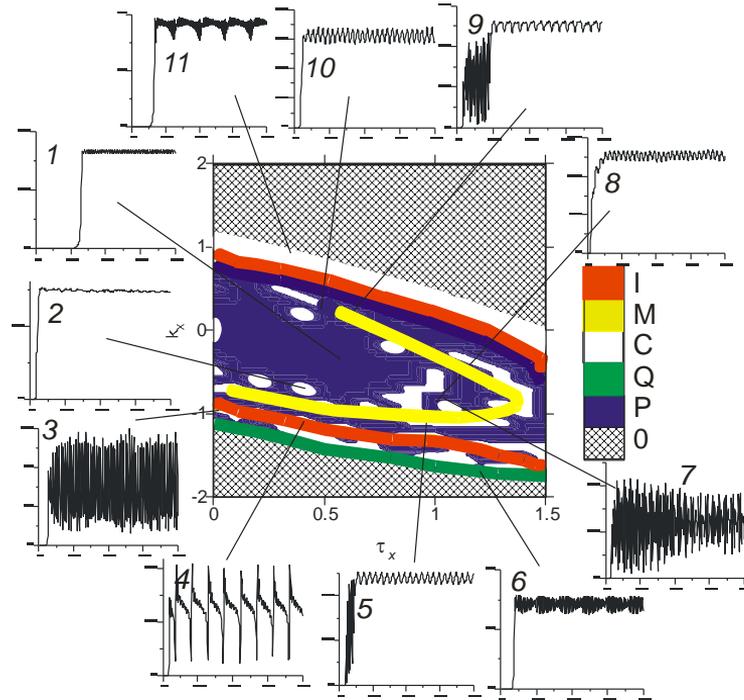
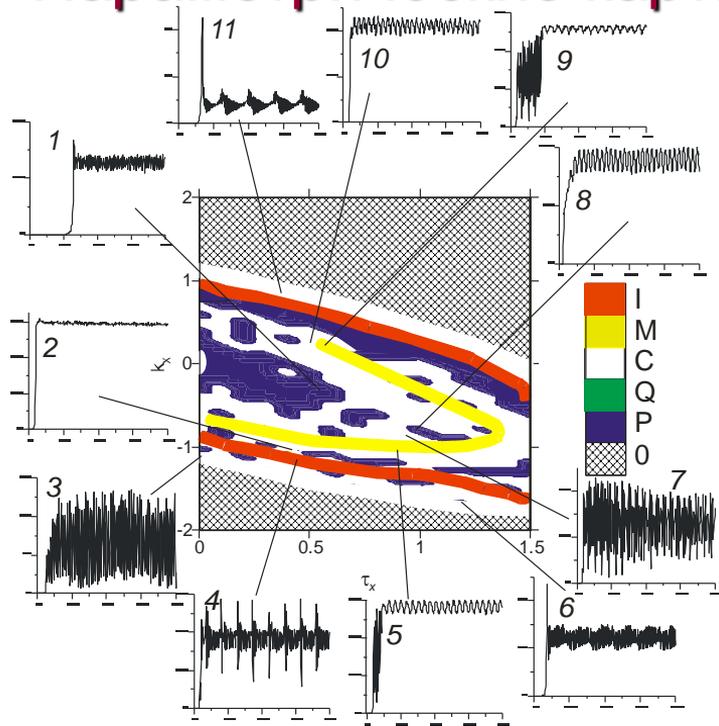


Неодномерная геометрия для проходящей волны

## 5. Исследование ОЛСЭ как динамического хаотического объекта



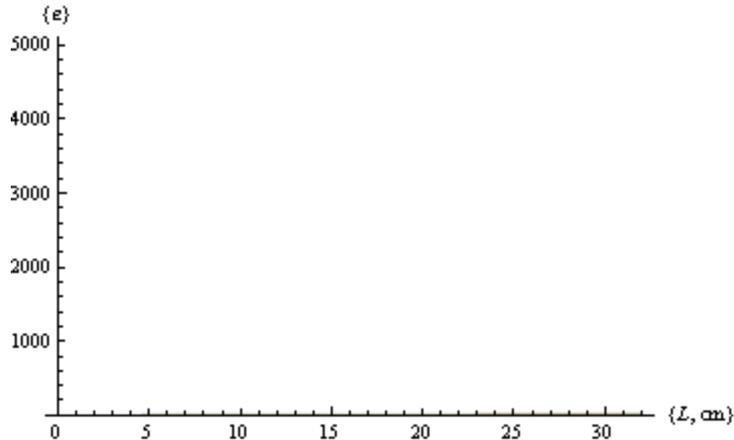
# Параметрические карты перехода к хаосу



0 означает, что плотность тока находится ниже порога. P – периодические режимы, Q – квазипериодичность, C – хаос, I – перемежаемость, M – переход между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами. По краям приведены зависимости амплитуды  $|E(L, t)|$  от времени (в нс)

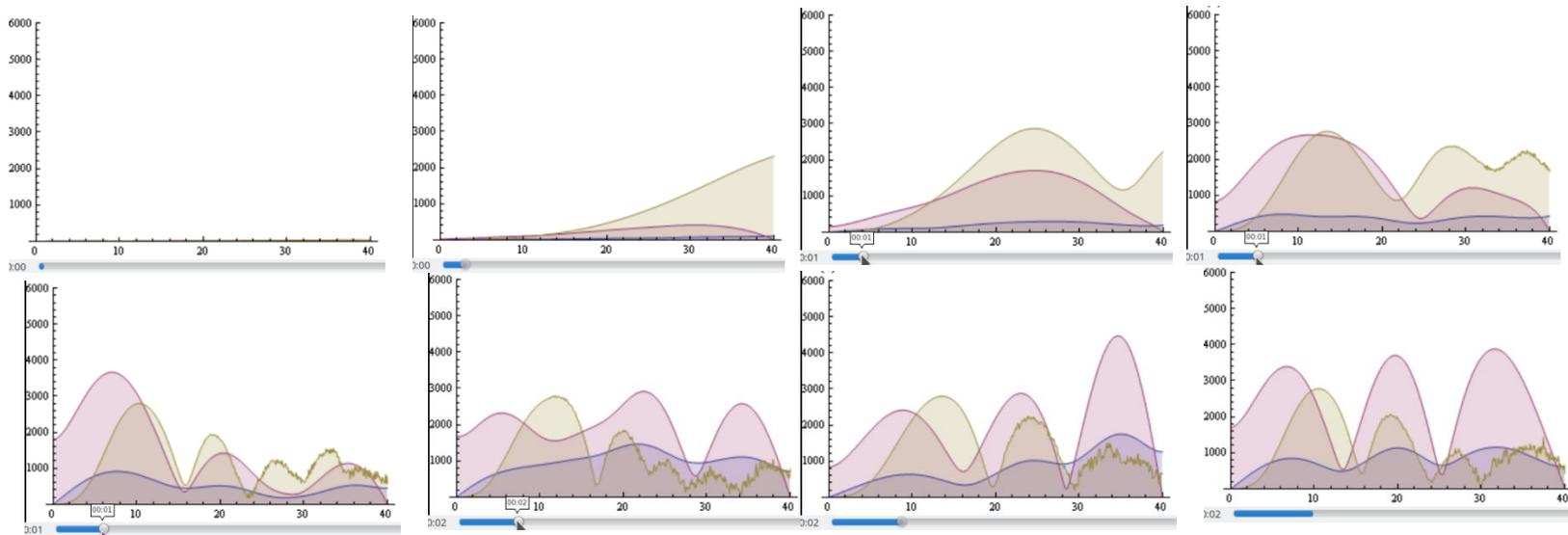
# Динамика генерации ОЛСЭ

При генерации больших мощностей в сверхразмерной системе, которой является ОЛСЭ, возникает генерация большого количества нежелательных мод. В результате развивается деструктивная интерференция, и излучение становится некогерентным. ОРОС позволяет выделить требуемые моды и подавить нежелательные.



# Подавление паразитных частот в ОЛСЭ

Не все паразитные частоты, возникающие в электронном пучке, проходящем через резонатор, передаются к проходящей волне, а тем более к дифрагированной. Чаще всего параметрические карты для дифрагированных волн существенно менее «пестрые», чем для проходящих.



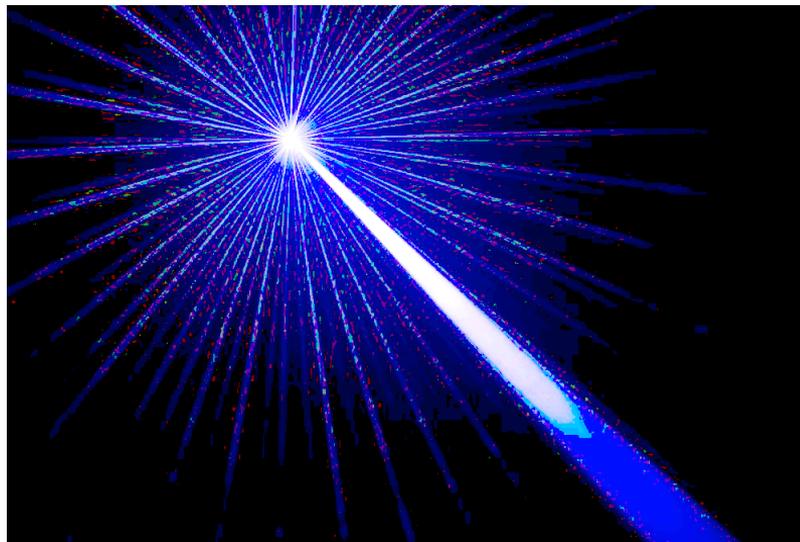
# Выводы

- Проведенное математическое моделирование подтвердило все основные физические закономерности и принципы работы ОЛСЭ. Численные результаты имеют разумное согласие с теоретическими и экспериментальными физическими результатами.
- Показано, что для эффективной генерации существует оптимальный набор параметров системы.
- Получены пороги генерации для экспериментальных установок НИИ ЯП БГУ.
- Впервые показано, что ОЛСЭ является динамической системой с особенностями нелинейной динамики генерации, обусловленными нелокальной природой взаимодействия пучка электронов с электромагнитным полем в условиях дифракции.
- В процессе исследования хаотической природы ОЛСЭ изучены его пространственно-временная и фазовая динамика, промоделированы различные динамические режимы работы со сложной их трансформацией.
- Проведенное исследование ОЛСЭ как хаотической динамической системы важно для реализации в будущих экспериментах способов управления хаосом и выбора оптимальных режимов работы ОЛСЭ.

# Основные публикации

1. К.Г. Батраков, С. Н. Сытова. Моделирование лазеров на свободных электронах. ЖВМ МФ. 2005. Т. 45, № 4. С. 690–700.
2. K. Batrakov, S. Sytova. Nonstationary stage of quasi-Cherenkov beam instability in periodical structure. Math. Mod. Anal. 2005. Vol. 10, No 1. P. 1–8.
3. K. Batrakov, S. Sytova. Nonlinear analysis of quasi-Cherenkov electron beam instability in VFEL (Volume Free Electron Laser). Nonlin. Phen. Compl. Syst. 2005. Vol. 8, No 1. P. 42–48.
4. K. Batrakov, S. Sytova. Dynamics of electron beam instabilities under conditions of multiwave distributed feedback. NPCS. 2005. Vol. 8, No. 4. P. 359–365.
5. K. Batrakov, S. Sytova. Mathematical modeling of multiwave Volume Free Electron Laser: basic principles and numerical experiments. Math. Mod. Anal. 2006. Vol. 11, No 1. P. 13–22.
6. S. Sytova. Volume Free Electron Laser (VFEL) as a Dynamical System. NPCS. 2007. Vol. 10, No 3. P. 297–302.
7. S. Sytova Numerical Analysis of Lasing Dynamics in Volume Free Electron Laser. Math. Mod. Anal. 2008. Vol. 13, No 2. P. 263–274.
8. S. Sytova. Some aspects of chaotic lasing in volume free electron lasers. NPCS. 2009. Vol. 12, No 1. P. 37–45.
9. С. Н. Сытова. Хаос в объемных лазерах на свободных электронах (ОЛСЭ). Известия вузов. ПНД. 2011. Т.19, № 2. С. 93–111.
10. S. Sytova. Comparison of One-Dimensional and Volume Distributed Feedback in Microwave Vacuum Electronic Devices. NPCS. 2012. Vol. 15, No 4. P. 378–386.
11. С. Н. Сытова. Модели объемных лазеров на свободных электронах. Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 6. С. 124–135.
12. В. Г. Барышевский, С. Н. Сытова. Радиационные процессы, радиационная неустойчивость и хаос в излучении, образованном релятивистскими пучками, движущимися в трехмерных (двумерных) пространственно-периодических структурах (естественных и фотонных кристаллах). Известия вузов. ПНД. 2013. Т. 21, № 6. С.25–48.
13. С. Н. Сытова Влияние внешних условий на хаос в объемных лазерах на свободных электронах. Доклады НАН Беларуси. 2014. Т.58, №1. С.47–52.
14. S. Sytova. Methods of chaos control in radiation of charged particles moving in non-one-dimensional periodical structures. NPCS. 2017. Vol. 20, No 2. P. 144–152.
15. С. Н. Сытова. Нелинейная динамика излучения сильноточных пучков заряженных частиц в пространственно-периодических структурах. Журнал БГУ. 2021, №1. С. 62–72.

# Спасибо за внимание!



[sytova@inp.bsu.by](mailto:sytova@inp.bsu.by)