

УДК 519.63

## РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

© 2001 г. С. Н. Сытова

**Введение.** Настоящая работа посвящена разработке и исследованию разностных методов для решения систем дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании объемных лазеров на свободных электронах (ОЛСЭ). Концепция ОЛСЭ, основанная на квазичеренковском излучении [1], была впервые предложена в [2] для рентгеновской области, а затем развита в [3–5] для других спектральных диапазонов. Линейный режим работы ОЛСЭ изучен достаточно хорошо [2–5], но он не позволяет исследовать режимы насыщения. Нелинейная стадия работы ОЛСЭ может быть рассмотрена только с использованием разностных методов, поскольку аналитически получить решения систем уравнений, описывающих нелинейный режим работы, невозможно. Такое моделирование было проведено для рентгеновского [6] и оптического диапазонов [7–8]. Там же для систем гиперболических уравнений были разработаны алгоритмы многокомпонентного метода переменных направлений (ММПН), предложенного в [9], развитого и исследованного во многих последующих работах. В данной работе мы остановимся на разностных методах для моделирования ОЛСЭ в субмиллиметровом диапазоне.

**1. Постановка задачи.** Уравнения, описывающие работу ОЛСЭ, выводятся следующим образом. Из двух первых уравнений Максвелла можно получить одно уравнение второго порядка вида

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля и  $\mathbf{j}$  – плотность тока пучка заряженных частиц. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\mathbf{E} = E e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \quad \mathbf{j} = j e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$  – волновой вектор с частотой  $\omega$ . Здесь и всюду ниже  $i$  – мнимая единица,  $c$  – скорость света. Рассмотрим два пространственных измерения:  $z$  и  $x$ . Если пренебречь вторыми производными в приближении медленно меняющихся амплитуд, то приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{k_z c^2}{\omega} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega} \frac{\partial E}{\partial x} = F(j). \quad (3)$$

Поскольку в ОЛСЭ имеются две сильные электромагнитные волны, то в двухволновом приближении получается система двух уравнений типа (3) для амплитуд  $E_1$  и  $E_2$ , которые связаны граничными условиями по  $z$ . Эти условия выводятся из условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей и представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка вида

$$A_l^- \frac{\partial E_l}{\partial t} + B_l^- \frac{\partial E_l}{\partial x} + C_l^- E_l + A_k^+ \frac{\partial E_k}{\partial t} + B_k^+ \frac{\partial E_k}{\partial x} + C_k^+ E_k = f_k(x, t, E_k^{(0)}, j), \quad (4)$$

где  $l = 1, 2$  и  $k = 2, 1$ , для двух границ  $z = 0$  и  $z = L$ ,  $t > 0$ ,  $0 < x < X$ ,  $E_k^{(0)}$  – амплитуда падающей на рассматриваемую границу волны. Начальные условия положим равными нулю во всех внутренних точках  $0 < z < L$ .

Мы не будем рассматривать уравнения, описывающие поведение пучка заряженных частиц, и уточнять нелинейность в правой части уравнений (3), (4) – это подробно описано в [7].

Уравнения (3) есть уравнения первого порядка с комплексной амплитудой  $E$  и действительными или комплексными коэффициентами. Случай, когда компоненты волнового вектора  $k_z$  и  $k_x$  действительные, т.е. имеем чисто гиперболическое уравнение, рассмотрен в [7]. Но при  $k_z = k'_z + ik''_z$  мы имеем дело с так называемыми поверхностными волнами [10]. Такие волны как бы не могут “оторваться” от поверхности и с расстоянием быстро затухают. В этом случае имеются две характеристики: действительная по  $x$  и комплексная по  $z$ . Очевидно, что если искать решение уравнения (1) не в виде (2), а отделить в экспоненте действительную компоненту  $\mathbf{k}$ :  $\mathbf{E} = Ee^{i(k'_z z + k_x x - \omega t)}$ , то получим уравнение типа (3) с действительными характеристиками и затухающей волной (при  $k''_z > 0$ ) с амплитудой  $E = Ee^{-k''_z z}$ .

Прежде чем перейти к обсуждению разностных методов для моделирования работы ОЛСЭ, исследуем возможные разностные схемы для решения следующего дифференциального уравнения первого порядка.

**2. Модельное уравнение.** Рассмотрим модельное уравнение

$$\partial u / \partial t + a \partial u / \partial z + b \partial u / \partial x = 0, \tag{5}$$

где коэффициент  $a$  является комплексным, а  $b$  – действительным.

Поставим для него простые граничное и начальное условия:

$$u(0, x, t) = u_0, \quad t > 0; \quad u(z, x, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq L. \tag{6}$$

Рассматривая корректность задачи (5), (6), даже в случае действительного коэффициента  $a$  становится очевидным, что ее решение является разрывным при  $t = 0$  и  $z = 0$ , т.е. в начальный момент времени на границу  $z = 0$  приходит ударная волна с амплитудой  $u_0$ . Тогда следует говорить об обобщенном решении модельной задачи. Более того, хорошо известно (см., например, [11]), что начальная задача для системы Коши–Римана является некорректно поставленной. Таким образом, в нашем случае надо ожидать, что задача будет также некорректной. Но, поскольку нас интересует только нулевая гармоника решения (5), которая после установления равна просто  $u_0$ , и мы знаем о существовании решения, можно попытаться использовать численные методы для решения модельной и полной нелинейной задач.

**3. Анализ возможных разностных схем.** Анализируя возможные разностные схемы для задачи (5), (6), рассмотрим пока только эллиптическую часть. Мы должны найти такую разностную схему, которая хорошо переносила бы амплитуду  $u_0$  с левой границы до правой. Для простоты рассмотрим сначала уравнение с чисто мнимым коэффициентом ( $a > 0$ )

$$\partial u / \partial t + ia \partial u / \partial z = 0. \tag{7}$$

В области  $\Omega = \{0 \leq z \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  введем равномерную сетку  $G = \{(z = z_k = kh, k = 0, \dots, N_z, h = [L/N_z], t = t_j = j\tau, j = 0, \dots, N_t, \tau = [T/N_t])\}$ .

Видно, что центрированные схемы применяться не могут, поскольку имеется одно граничное условие (6). Если мы хотим, чтобы амплитуда  $u_0$  переносилась слева направо, нужно использовать соответствующую разностную производную. Итак, рассмотрим простейшие разностные схемы:

1) явная схема первого порядка

$$(y_k^{j+1} - y_k^j) / \tau + ia(y_k^j - y_{k-1}^j) / h = 0; \tag{8}$$

2) неявная схема первого порядка

$$(y_k^{j+1} - y_k^j) / \tau + ia(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) / h = 0; \tag{9}$$

3) схема с весами

$$(y_k^{j+1} - y_k^j) / \tau + (ia/h)(\sigma(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) + (1 - \sigma)(y_k^j - y_{k-1}^j)) = 0; \tag{10}$$

4) схема бегущего счета

$$(y_k^{j+1} - y_k^j)/\tau + (ia/(2h))((y_k^{j+1} + y_k^j) - (y_{k-1}^{j+1} + y_{k-1}^j)) = 0 \quad (11)$$

второго порядка аппроксимации по  $t$  и первого по  $z$ ;

5) схема второго порядка

$$((y_k^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}) - (y_k^j + y_{k-1}^j))/(2\tau) + (ia/(2h))((y_k^{j+1} + y_k^j) - (y_{k-1}^{j+1} + y_{k-1}^j)) = 0. \quad (12)$$

Чтобы исследовать спектральную устойчивость приведенных схем, следуя [12], рассмотрим спектральную задачу

$$ia(\omega_k - \omega_{k-1})/h = \lambda\omega_k. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) имеет следующий вид:

$$\omega_k = e^{ikph} \quad (14)$$

для произвольного целого  $p$ . Из (13) и (14) для собственного значения  $\lambda_p$  получим выражение

$$\lambda_p = (a/h)(2i \sin^2(ph/2) - \sin ph). \quad (15)$$

Теперь можно найти условие счетной устойчивости для явной схемы (8):

$$|T_p|^2 = |1 - \tau\lambda_p|^2 \leq 1, \quad (16)$$

где  $T_p$  – множитель перехода для коэффициентов Фурье:

$$|T_p|^2 = (1 + (\tau a/h) \sin ph)^2 + 4(\tau a/h)^2 \sin^4(ph/2).$$

Поскольку  $p$  является произвольным, видно, что условие (16) не может быть выполнено практически ни при каких условиях и схема (9) является неустойчивой.

В случае неявной схемы (9) условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$|T_p|^2 = |1 + \tau\lambda_p|^2 \geq 1, \quad |T_p|^2 = 1 + (\tau a/h)^2 \sin^2 ph + 4(\tau a/h)^2 \sin^4(ph/2) - (2\tau a/h) \sin ph. \quad (17)$$

Очевидно, что в данном случае выполняется следующее условие счетной устойчивости:  $\tau a/h \geq 2$ .

Для схемы (10) имеем

$$|T_p|^2 = \left| \frac{1 - \tau\lambda_p(1 - \sigma)}{1 + \tau\lambda_p\sigma} \right|^2 \leq 1,$$

$$1 + (1 - \sigma)^2(\tau a/h)^2 \sin^2 ph + 4(1 - \sigma)^2(\tau a/h)^2 \sin^4(ph/2) + (1 - \sigma)(2\tau a/h) \sin ph \leq \\ \leq 1 + \sigma^2(\tau a/h)^2 \sin^2 ph + 4\sigma^2(\tau a/h)^2 \sin^4(ph/2) - \sigma(2\tau a/h) \sin ph.$$

При  $\sigma = 0$  получаем условие (16), при  $\sigma = 1$  – условие (17), при  $0 < \sigma < 1$  имеем  $(2\tau a/h) \sin ph + (1 - 2\sigma)(\tau a/h)^2 \sin^2 ph + 4(1 - 2\sigma)(\tau a/h)^2 \sin^4(ph/2) \leq 0$ . Таким образом, в данном случае условие устойчивости следующее:  $\tau a/h \geq 2/(2\sigma - 1)$  при  $0.5 < \sigma \leq 1$ .

Необходимо отметить, что случай  $\sigma = 0.5$  соответствует схеме (11), неустойчивой для мнимого коэффициента.

Последняя схема (12) с множителем перехода

$$|T_p|^2 = |(1 - \tau\lambda_p)/(1 + \tau\lambda_p)|^2 \leq 1$$

является неустойчивой, поскольку последнее неравенство эквивалентно неравенству  $(4\tau a/h) \sin ph \leq 0$ , которое не может быть выполнено для любого  $p$ .

Если рассмотрим комплексный коэффициент  $a = a' + ia''$  для модельного уравнения

$$\partial u / \partial t + a \partial u / \partial z = 0, \tag{18}$$

то получим, например, для неявной схемы выражение для условия устойчивости

$$|T_p|^2 = \left(1 + \frac{2\tau a'}{h} \sin^2 \frac{ph}{2} - \frac{\tau a''}{h} \sin ph\right)^2 + \left(\frac{a'\tau}{h} \sin ph + \frac{2\tau a''}{h} \sin^2 \frac{ph}{2}\right)^2 \geq 1$$

или

$$(\tau/h)|a|^2 \geq 2a''. \tag{19}$$

В подтверждение сказанного выше проведем анализ результатов численного эксперимента. Обозначим  $\tau a/h = d$ . На рис. 1 показано численное решение уравнения (18) с нулевым начальным и единичным граничным условием, полученное с использованием неявной схемы (9). График (а) соответствует значению  $d = 1 + i$ , которое дает равенство в условии (19). "Горб" в начальный момент времени соответствует процессу прохождения фронта ударной волны и установления единичного решения. Если взять  $d = 10 + i \cdot 10$  (рис. 1б), то видно, что поверхность решения проходит вблизи единичной плоскости. При больших по модулю  $d$  результаты идеальны. При невыполнении условия (19) получено неустойчивое решение.

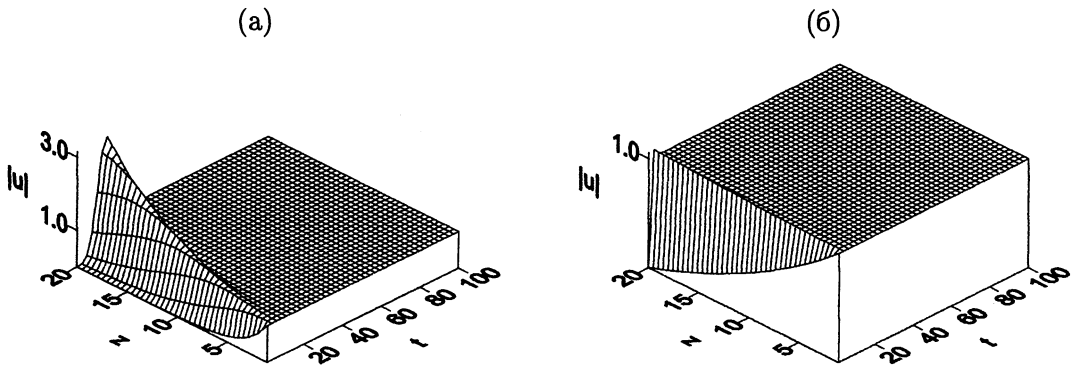


Рис. 1. Вычисления по неявной схеме (9).

Возвращаясь к уравнению (5), поскольку мы нашли приемлемые разностные схемы для его эллиптической части, можно попытаться использовать для его решения в целом многокомпонентные методы, что и будет сделано в следующем пункте.

**4. Разностные схемы для моделирования поверхностного ОЛСЭ.** Рассмотрим два уравнения вида (3) с амплитудами  $E_1$  и  $E_2$  и два граничных условия вида (4). Учитывая результаты п. 3, подтверждающие, что для решения уравнений вида (5) можно пользоваться неявными схемами первого порядка, предлагаем алгоритм ММПН (такого типа алгоритмы для гиперболических задач см. в [6, 7]). Являясь методом полной аппроксимации, ММПН показал себя эффективным и безусловно устойчивым для многомерных задач в областях со сложной геометрией, а также при работе с комплексной арифметикой. Кроме этого, он позволяет осуществлять параллельный счет.

Будем использовать обозначения из [13]. Введем в области  $\Omega = \{(z, x, t), 0 \leq z \leq L, 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$  равномерную пространственную и временную сетки. Применяем следующий численный алгоритм для моделирования работы ОЛСЭ:

$$\begin{aligned} E_{kt}^1 + A_{1k} \widehat{E}_{kz}^1 + A_{2k} E_{kx}^2 &= \widehat{F}_k, & E_{kt}^2 + A_{1k} \widehat{E}_{kz}^1 + A_{2k} \widehat{E}_{kx}^2 &= \widehat{F}_k, \\ A_l^- E_{lt}^1 + B_l^- E_{lx}^2 + C_l^- \widehat{E}_l^1 + A_k^+ E_{kt}^1 + B_k^+ E_{kx}^2 + C_k^+ \widehat{E}_k^1 &= \widehat{f}_k, \\ A_l^- E_{lt}^2 + B_l^- \widehat{E}_l^2 + C_l^- \widehat{E}_l^1 + A_k^+ E_{kt}^2 + B_k^+ \widehat{E}_{kx}^2 + C_k^+ \widehat{E}_k^1 &= \widehat{f}_k, \end{aligned}$$

где  $k = 1, 2$  и  $l = 1, 2$ ,  $E_k^1$  и  $E_k^2$  – две компоненты приближенного решения для  $E_k$ .

Направления разностных производных по  $z$  и  $x$  (левая или правая) выбираются в зависимости от направления распространения волн.

При решении систем уравнений для функций распределения пучка заряженных частиц также использовался алгоритм ММПН.

На рис. 2 показаны результаты моделирования работы ОЛСЭ для следующего набора параметров: частота  $\omega = 10^{13}$  с, толщина  $L = 0.01$  см, длина  $X = 10$  см, время  $T = 1.5$  нс. Лоренц-фактор частиц пучка  $\gamma = 1.5$  и ленгмюровская частота  $\omega_L^2 = 10^{21}$  с<sup>-2</sup>. Величина амплитуды, приходящей на границу  $z = 0$  волны, равна 1:  $E_1^{(0)} = 1$ . Здесь изображены амплитуды модулей обеих волн в зависимости от времени и координаты  $z$  при отсутствии ( $j = 0$  в (3) и (4)) и наличии пучка частиц. Номера кривых соответствуют: 1 – амплитуде с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  при отсутствии электронного пучка и 3 – в его присутствии, 2 и 4 – то же для волны с вектором  $\mathbf{k}_2$ . Поскольку  $\tau A_{11}/h = i \cdot 1310$  и  $\tau A_{12}/h = -i \cdot 1310$ , то мы можем видеть быстрое установление устойчивого решения (см. рис. 2а). Эволюция обеих амплитуд во времени и в пространстве в присутствии электронного пучка полностью соответствует ожидаемому поведению.

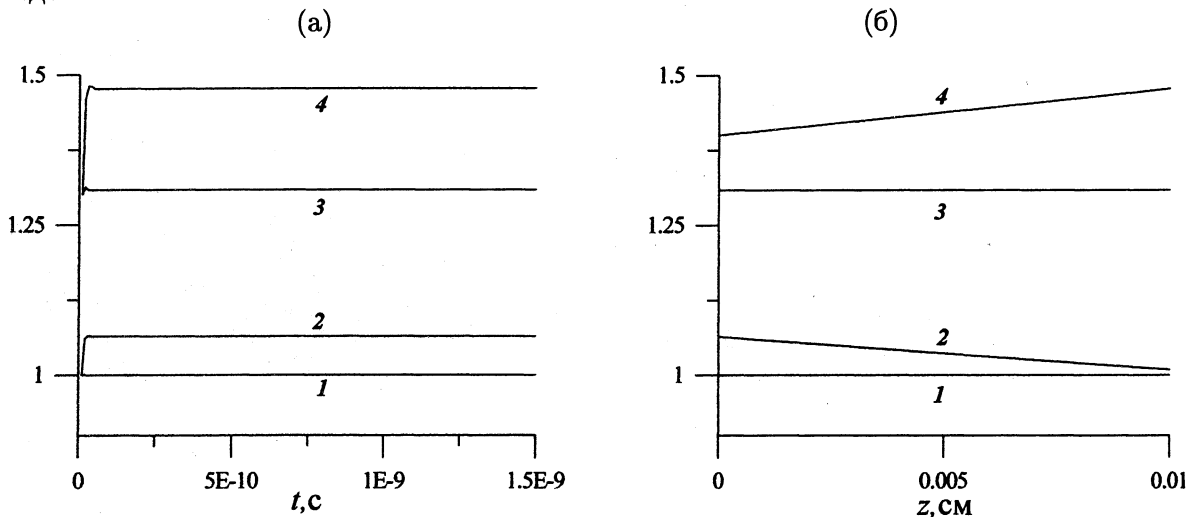


Рис. 2. Амплитуды проходящей и дифрагированной волн: а – при  $z = L$  и б – при  $t = T$  в точке  $x = X$ .

Следует отметить, что, по всей видимости, для уравнений типа (5) безусловно устойчивых схем нет. Однако условно устойчивые неявные схемы первого порядка в рамках ММПН могут эффективно применяться при решении рассмотренных и аналогичного типа задач.

Данная работа выполнена в рамках проекта INTAS-97 (№ 32041) и Государственной программы фундаментальных исследований РБ “Алгоритм”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. // Phys. Lett. 1976. V. A57. № 3. P. 183–185.
2. Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya. // J. of Physics: D “Applied Physics”. 1991. V. 24. P. 1250–1257.
3. Барышевский В.Г., Батраков К.Г., Дубовская И.Я. // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-тэх. навук. 1992. № 3. С. 99–106.
4. Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1994. V. A341. P. 274–276.
5. Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya., Sytova S.N. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1995. V. A358. P. 508–511.
6. Абрашын В.Н., Грубич А.О., Сытова С.Н. // Мат. моделирование. 1991. Т. 3. № 8. С. 21–29.

7. *Сытова С.Н.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 7. С. 986–989.
8. *Dubovskaya I.Ya., Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Sytova S.N.* // The 21th International Free Electron Laser Conference (FEL99). Hamburg, Germany. August 23–28, 1999.
9. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 26. № 2. С. 314–323.
10. *Семенов А.А.* Теория электромагнитных волн. М., 1968.
11. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М., 1979.
12. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М., 1989.
13. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.

Институт ядерных проблем Белорусского  
государственного университета, г. Минск

Поступила в редакцию  
01.03.2001 г.