

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ

С. Н. СЫТОВА

1. Введение. Данная работа посвящена построению разностных схем для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка гиперболического типа с граничными условиями, являющимися нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. При решении использовался многокомпонентный вариант метода переменных направлений. В работах [1 — 3] и др. для различных классов многомерных задач математической физики разработаны многокомпонентные схемы варианта метода переменных направлений. Этот метод является безусловно устойчивым без стабилизирующих поправок для задач любой размерности, экономичным и не требует коммутативности пространственных операторов для выполнения условий устойчивости. Он эффективен при решении многомерных задач и работе с комплексной арифметикой.

2. Математическая модель. Лазер на свободных электронах (ЛСЭ) — прибор, в котором вынужденное излучение релятивистского электронного пучка приводит к усилению электромагнитных волн. В работах [4, 5] рассмотрена линейная теория поверхностного параметрического ЛСЭ, работающего в оптическом диапазоне длин волн. Однако для корректного моделирования работы такого ЛСЭ представляет интерес изучение нелинейной стадии квазичеренковской неустойчивости, развивающейся в системе, так как в процессе генерации линейный режим быстро разрушается. Будем решать задачу, моделирующую развитие квазичеренковской неустойчивости в поверхностном параметрическом ЛСЭ.

Итак, пусть на кристаллическую пластинку толщиной L_z и длиной L_x под некоторым углом падает электромагнитная волна с амплитудой u_0 . Одновременно над поверхностью кристалла в вакууме вдоль оси Ox летит электронный пучок. Из уравнений Максвелла и кинетических уравнений для функций распределения электронов по скоростям в пучке в приближении медленно меняющихся амплитуд можно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\partial u / \partial t + A \partial u / \partial z + B \partial u / \partial x + Q u = F, \quad (1)$$

$$\partial f / \partial t + v \partial f / \partial x + R \partial f / \partial v + P f = D. \quad (2)$$

Здесь $u = u(z, x, t)$; $u = (u_1, \dots, u_5)$ — комплекснозначные амплитуды взаимодействующих электромагнитных волн; $f = f(z, x, v, t)$, $f = (f_1, \dots, f_5)$ — действительные функции распределения, описывающие электронный пучок.

Матрицы A и B имеют вид $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_5)$, $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_5)$, $A_i, B_i, i = \overline{1, 5}$, — действительные числа. Отметим, что для различных возможных геометрий знаки A_i, B_i зависят от направления распространения волн; Q — комплексная матрица размерности 5×5 с тремя ненулевыми элементами Q_{12}, Q_{21}, Q_{22} .

Функция $F = (0, 0, 0, 0, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} = \mathcal{F}(j, z, x, t)$ — комплекснозначная функция от плотности тока пучка $j = j(f_1, f_2)$, представляющего собой интеграл от f_1, f_2 по скоростям v ; $R = R(u)$, $P = P(v)$, $D = D(u, f_0)$ — действительные матрицы; $f_0 = f_0(z, x, v, t)$ — невозмущенная функция распределения пучка.

Четыре первых уравнения из системы (1) описывают процессы дифракции оптического излучения в кристалле, а пятое уравнение этой системы и (2) — взаимодействие электронного пучка и прошедшей через кристалл электромагнитной волны в вакууме над поверхностью кристалла.

Для (1), (2) введем области непрерывного изменения переменных $g_z^{cr} = \{0 \leq z \leq L_z\}$, $g_z^{vac} = \{L_z \leq z \leq L_z + d\}$, где d — толщина электронного пучка, $g_x = \{0 \leq x \leq L_x\}$, $g_v = \{v - \Delta v \leq v \leq v + \Delta v\}$, где v — невозмущенная скорость частиц пучка, $g_t = \{0 \leq t \leq T\}$.

Тогда для четырех первых уравнений из (1) область непрерывного изменения переменных будет $G_1 = g_z^{cr} \times g_x \times g_t$, для последнего уравнения из (1) — $G_2 = g_z^{vac} \times g_x \times g_t$, для (2) — $G_3 = g_z^{vac} \times g_x \times g_v \times g_t$.

Следует отметить, что в математической модели для поверхностного параметрического ЛСЭ направление распространения по z волны с амплитудой u_3 противоположно направлению волн с амплитудами u_1 и u_5 , а направление u_4 противоположно u_2 . Физически волны u_3 и u_4 являются отраженными волнами соответственно от u_1 и u_2 .

Система (1), (2) решалась со следующими начальными условиями:

$$u_k(z, x, 0) = 0, \quad k = \overline{1, 5}, \quad (z, x, 0) \in G_1 \text{ для } k = \overline{1, 4}, \quad (z, x, 0) \in G_2 \text{ для } k = 5;$$

$$f_j(z, x, v, 0) = 0, \quad j = \overline{1, 5}, \quad (z, x, v, 0) \in G_3. \quad (3)$$

Граничные условия для (1) по z будут также дифференциальными уравнениями вида

$$a_{10} \frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} u_1 + a_{13} u_2 + a_{14} \frac{\partial u_3}{\partial t} + a_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x} + a_{16} u_3 = a_{17} \frac{\partial u_0}{\partial t} + a_{18} \frac{\partial u_0}{\partial x} + a_{19} u_0,$$

$$a_{20} \frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x} + a_{22} u_1 + a_{23} u_2 + a_{24} \frac{\partial u_4}{\partial t} + a_{25} \frac{\partial u_4}{\partial x} + a_{26} u_4 = 0 \text{ при } z = 0, \quad (4)$$

$$b_{10} \frac{\partial u_1}{\partial t} + b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + b_{12} u_1 + b_{13} u_2 + b_{14} \frac{\partial u_3}{\partial t} + b_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x} + b_{16} u_3 = b_{17} \frac{\partial j}{\partial t} + b_{18} \frac{\partial j}{\partial x} + b_{19} j,$$

$$b_{20} \frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{22} u_1 + b_{23} u_2 + b_{24} \frac{\partial u_4}{\partial t} + b_{25} \frac{\partial u_4}{\partial x} + b_{26} u_4 = 0, \quad b_{31} u_1 + b_{32} u_3 = u_5 \text{ при } z = L_z.$$

Коэффициенты a_{ij} , b_{ij} в (4) являются комплексными числами. Отметим, что по x и v рассматривается задача Коши.

3. Разностная схема. Система (1) — (4) — система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка гиперболического типа. При ее решении возникают существенные трудности: многомерность задачи; граничные условия представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, не разрешенные относительно первых производных по времени для нескольких функций; в правой части (1) стоит функционал от интеграла по скоростям для функций распределения f_1 , f_2 , т.е. исходная система является интегро-дифференциальной; существует определенная жесткость в двух первых уравнениях (1). Последнее связано с тем, что известное аналитическое решение стационарной задачи двухволновой дифракции имеет вид [6]

$$u_k = c_1^k \exp(i\delta_1 z) + c_2^k \exp(i\delta_2 z), \quad (5)$$

где c_j^k , $j, k = 1, 2$, — константы, определяемые из линейных граничных условий, а δ_1, δ_2 — решения дисперсионного уравнения, причем возможны случаи, когда δ_2 является комплексно-сопряженным к δ_1 или же $|\delta_2| > |\delta_1|$.

Области непрерывного изменения переменных g_z^{cr} , g_z^{vac} , g_x , g_v , g_t заменим сетками: $\omega_z^{cr} = \{z_i = ih_{z1}, i = \overline{0, N_1}, N_1 = [L_z/h_{z1}]\}$, $\omega_z^{vac} = \{z_j = jh_{z2}, j = \overline{0, N_2}, N_2 = [d/h_{z2}]\}$, $\omega_x = \{x_k = kh_x, k = \overline{0, N_3}, N_3 = [L_x/h_x]\}$, $\omega_v = \{v_l = lh_v, l = \overline{0, N_4}, N_4 = [2\Delta v/h_v]\}$, $\omega_t = \{t_m = mh_t, m = \overline{0, N_5}, N_5 = [T/h_t]\}$.

Введем обозначение $y^* = (y_i + y_{i-1})/2$. В рамках варианта метода переменных направлений система (1) на сетках $\omega_1 = \omega_z^{cr} \times \omega_x \times \omega_t$ и $\omega_2 = \omega_z^{vac} \times \omega_x \times \omega_t$ аппроксимируется системой разностных уравнений

$$y_i^1 + A\hat{y}_z^1 + B\hat{y}_x^2 + Q\hat{y}^{1*} = F, \quad y_i^2 + A\hat{y}_z^1 + B\hat{y}_x^2 + Q\hat{y}^{1*} = F, \quad (6)$$

где направления производных по z и по x (левая или правая) выбираются в зависимости от направления распространения волн, $F = F(z_j, x_k, t_m)$. Интеграл по скоростям для функций распределения вычисляется с помощью интегрирования кубических сплайнов, аппроксимирующих функции f_1 и f_2 . В (6) y^1, y^2 — пары приближенных решений u . В качестве решения в

каждой точке ω_1 и ω_2 может быть взято одно из приближенных решений (первое или второе) или их полусумма.

Граничные условия также аппроксимируются системами разностных уравнений. Для первой компоненты y^1 разностная схема запишется в виде

$$\begin{aligned} a_{10}y_{1t}^1 + a_{11}y_{1x}^2 + a_{12}\hat{y}_1^1 + a_{13}\hat{y}_2^1 + a_{14}y_{3t}^1 + a_{15}y_{3x}^2 + a_{16}\hat{y}_3^1 &= a_{17}y_{0t} + a_{18}y_{0x} + a_{19}\hat{y}_0, \\ a_{20}y_{2t}^1 + a_{21}y_{2x}^2 + a_{22}\hat{y}_1^1 + a_{23}\hat{y}_2^1 + a_{24}y_{4t}^1 + a_{25}y_{4x}^2 + a_{26}\hat{y}_4^1 &= 0, \\ b_{10}y_{1t}^1 + b_{11}y_{1x}^2 + b_{12}\hat{y}_1^1 + b_{13}\hat{y}_2^1 + b_{14}y_{3t}^1 + b_{15}y_{3x}^2 + b_{16}\hat{y}_3^1 &= b_{17}j_t + b_{18}j_x + b_{19}\hat{j}, \\ b_{20}y_{2t}^1 + b_{21}y_{2x}^2 + b_{22}\hat{y}_1^1 + b_{23}\hat{y}_2^1 + b_{24}y_{4t}^1 + b_{25}y_{4x}^2 + b_{26}\hat{y}_4^1 &= 0, \quad b_{31}\hat{y}_1^1 + b_{32}\hat{y}_3^1 = \hat{y}_5^1. \end{aligned} \quad (7)$$

Вид разностной схемы для компоненты y^2 зависит от направления распространения волн по z . Пусть u_1 распространяется в положительном направлении, а u_2 — в отрицательном, т.е. имеем случай так называемой геометрии Брэгга. Тогда с учетом замечания о направлении волн по z из п. 2 будем иметь

$$\begin{aligned} a_{10}y_{1t}^2 + a_{11}\hat{y}_{1x}^2 + a_{12}\hat{y}_1^1 + a_{13}\hat{y}_2^1 + a_{14}y_{3t}^1 + a_{15}y_{3x}^2 + a_{16}\hat{y}_3^1 &= a_{17}y_{0t} + a_{18}\hat{y}_{0x} + a_{19}\hat{y}_0, \\ a_{20}y_{2t}^1 + a_{21}y_{2x}^2 + a_{22}\hat{y}_1^1 + a_{23}\hat{y}_2^1 + a_{24}y_{4t}^2 + a_{25}\hat{y}_{4x}^2 + a_{26}\hat{y}_4^1 &= 0, \\ b_{10}y_{1t}^1 + b_{11}y_{1x}^2 + b_{12}\hat{y}_1^1 + b_{13}\hat{y}_2^1 + b_{14}y_{3t}^2 + b_{15}\hat{y}_{3x}^2 + b_{16}\hat{y}_3^1 &= b_{17}j_t + b_{18}\hat{j}_x + b_{19}\hat{j}, \\ b_{20}y_{2t}^2 + b_{21}\hat{y}_{2x}^2 + b_{22}\hat{y}_1^1 + b_{23}\hat{y}_2^1 + b_{24}y_{4t}^1 + b_{25}y_{4x}^2 + b_{26}\hat{y}_4^1 &= 0, \quad b_{31}\hat{y}_1^2 + b_{32}\hat{y}_3^2 = \hat{y}_5^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Направления производных по x (левая или правая) в (7), (8) также выбираются в зависимости от направления распространения волн.

Смысл построения схем для граничных условий типа (8) состоит в том, что в каждом разностном уравнении сверху вычисляются те компоненты решения y^2 , которые соответствуют "выходящим" с данной границы волнам. "Приходящим" на эту границу волнам соответствуют решения y^1 , вычисленные ранее (y^2 для этих волн определяются из (6)).

Начальные условия аппроксимируются следующим образом:

$$y_i^{1,2}(z_j, x_k, 0) = 0, \quad (9)$$

$i = \overline{1, 5}$, $(z_j, x_k, 0) \in \omega_1$ для $i = \overline{1, 4}$, $(z_j, x_k, 0) \in \omega_2$ для $i = 5$.

Приведенные разностные схемы являются экономичными. Благодаря использованию двухкомпонентного варианта метода переменных направлений удалось получить разностный аналог системы (1) — (4), который решается последовательно, без итераций. Счет по этим схемам осуществляется следующим образом. Для получения решения \hat{y}^1 необходимо решить систему линейных уравнений вида $A\hat{y}^1 = F$. В матрицу A входят коэффициенты, стоящие перед \hat{y}^1 для z_i , $i = \overline{0, N_1}$, в (6), (7) и не зависящие от x . Поэтому A^{-1} можно вычислить только один раз перед началом счета, затем в каждой точке x_k вычисляется вектор правых частей F , составленный из величин, невошедших в A и зависящих от x ; $\hat{y}^1 = A^{-1}F$.

При вычислении вектора решений y^2 следует двигаться по x в соответствии с направлениями распространения волн, причем этот процесс является полностью распараллеленным относительно движения по z .

При численном решении (6) сначала y^1 при коэффициентах Q брались просто на верхнем слое. Однако в связи с тем, что в линейном приближении справедливо (5), потребовались слишком мелкие шаги h_{z_1} для получения достаточно хороших разностных решений. Это можно объяснить тем, что чисто неявные схемы для гиперболических уравнений обладают большой аппроксимационной вязкостью, пропорциональной величине шагов расчетной сетки [7]. Схема же (6) даже при достаточно больших шагах h_{z_1} дает удовлетворительную качественную картину решения.

Введем обозначение $\bar{f} = (f_{i+1} - f_{i-1})/(2h_v)$. На сетке $\omega_3 = \omega_z^{\text{vac}} \times \omega_x \times \omega_v \times \omega_t$ система (2) аппроксимируется системой разностных уравнений

$$f_i^1 + v_i \hat{f}_x^1 + R\bar{f}^2 + P\hat{f}^1 = \hat{D}, \quad \hat{f}^2 - \bar{f}^2 + v_i \hat{f}_x^2 + R\bar{f}^2 + P\hat{f}^2 = \hat{D}, \quad (10)$$

где f^1, f^2 — пара приближенных решений f (в качестве решения берется их полусумма), $R = R(\hat{y}^1, \hat{y}^2)$, $P = P(v_i)$, $\hat{D} = D(\hat{y}^1, \hat{y}^2, f_0(z_j, x_k, v_i, t_{m+1}))$.

Начальные условия для (2) на ω_3 аппроксимируются следующим образом:

$$f^{1,2}(z_j, x_k, v_i, 0) = 0. \quad (11)$$

В (10) использована схема Лакса для аппроксимации производных по скоростям v . Только эта схема оказалась эффективной в случае, когда собственные числа матрицы R имеют вид $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_3$, $\lambda_4 = -\lambda_5$.

Схемы (6) — (11) являются схемами полной аппроксимации. На достаточно гладких решениях они имеют первый порядок аппроксимации по времени, пространству и скоростям.

Для разностных схем (6) — (11) можно доказать устойчивость по начальным данным и правой части, а также сходимость решения данной разностной задачи к решению исходной дифференциальной (1) — (4) при $h_{x_1}, h_{x_2}, h_x, h_v, h_t \rightarrow 0$. Это следует из свойств варианта метода переменных для задач любой размерности [1].

4. Результаты. Приведенные разностные схемы реализованы в виде комплекса программ. Тестирование этих программ проводилось в два этапа. На первом этапе сравнивались результаты расчетов по схемам (6) — (9) с аналитическим решением (5) стационарной линейной задачи дифракции. Для случая $\text{Re}(\delta_1) = \text{Re}(\delta_2)$, $\text{Im}(\delta_1) = -\text{Im}(\delta_2)$ на рис. 1 построены графики для $|y^1|$ (сплошная линия при $N_1 = 50$ и штриховая при $N_1 = 10$). При $N_1 = 50$ график функции $|y^1|$ полностью совпадает с графиком функции $|u_1| = |c_1^1 \exp(i\delta_1 z) + c_2^1 \exp(i\delta_2 z)|$. На рис. 2 изображены графики $\text{Re}(y^1)$ ($N_1 = 50$) и $\text{Re}(u_1)$ для случая $|\delta_2| > |\delta_1|$ (кривые практически совпадают). На основании проведенных расчетов можно говорить об эффективности работы разностных алгоритмов, построенных в данной работе. На втором этапе проводилось сравнение результатов расчетов по полной схеме (6) — (11) с аналитическими решениями линейной теории поверхностного параметрического ЛСЭ. Здесь также получены удовлетворительные результаты.

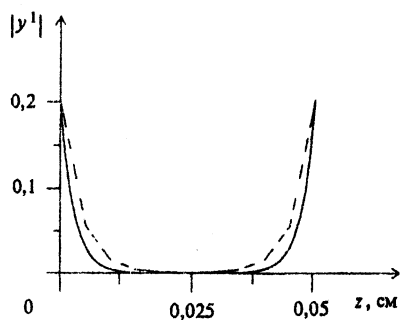


Рис. 1

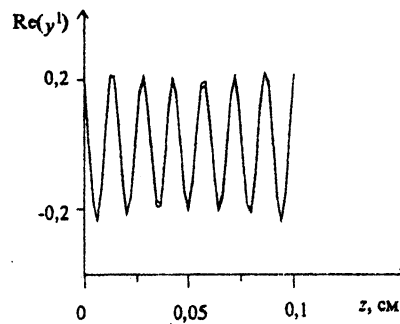


Рис. 2

Автор выражает глубокую благодарность В. Н. Абрашину за помощь в работе, а также И. Я. Дубовской и К. Г. Батракову за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Литература

1. Абрашин В. Н. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 316 — 323.
2. Абрашин В. Н., Дзюба И. А. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 7. С. 1179 — 1191.
3. Жадаева Н. Г. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 7. С. 1218 — 1230.
4. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1994. Vol. A341. P. 274.
5. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya., Sytova S. N. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1995. Vol. A358 P. 508 — 511.
6. Ярич А., Юх П. Оптические волны в кристалле. М., 1987.
7. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Новосибирск, 1985.

Научно-исследовательский институт ядерных проблем при
Белорусском государственном университете

Поступила в редакцию
23 марта 1996 г.